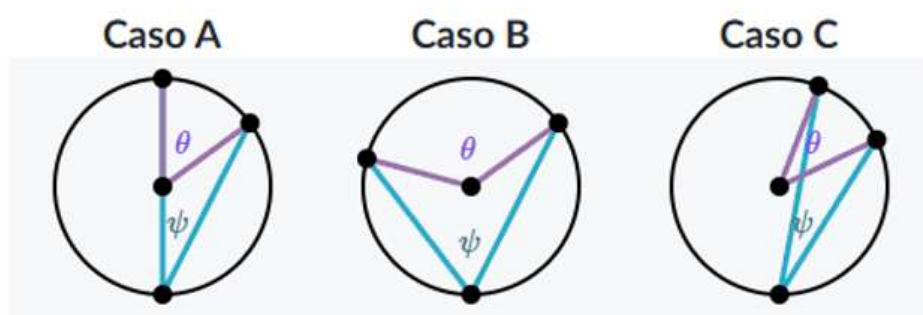


Ângulos Central e Inscrito

Estamos prestes a demonstrar que algo muito legal acontece quando um ângulo inscrito (ψ) e um ângulo central (θ) interceptam o mesmo arco: **a medida do ângulo central é o dobro da medida do ângulo inscrito.** $\theta = 2\psi$

Visão geral da demonstração

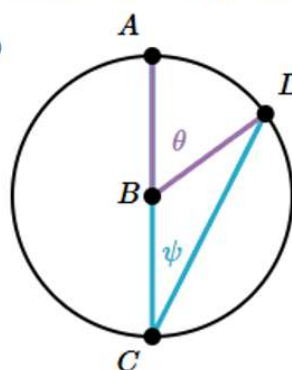
Para demonstrar que $\theta = 2\psi$ para todos os θ e ψ (como definidos acima) devemos considerar três casos separados:



Juntos, esses casos abrangem todas as situações possíveis em que um ângulo inscrito e um ângulo central interceptam o mesmo arco.

Caso A: o diâmetro está ao longo de um raio do ângulo inscrito, ψ .

Etapa 1: encontrar o triângulo isósceles.

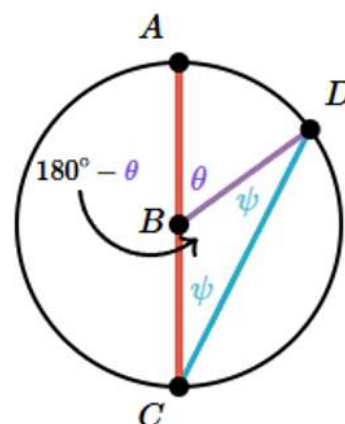


Etapa 2: encontrar o ângulo raso.

O ângulo $\angle ABC$ é um ângulo raso, então

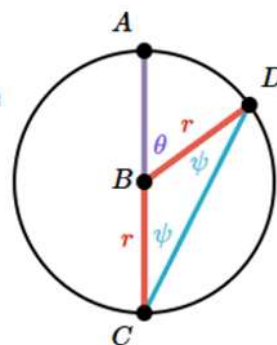
$$\theta + m\angle DBC = 180^\circ$$

$$m\angle DBC = 180^\circ - \theta$$



Os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{BD}$ são ambos raios, então eles têm o mesmo comprimento. Isso significa que o $\triangle CBD$ é isósceles, o que também significa que os ângulos de sua base são congruentes:

$$m\angle C = m\angle D = \psi$$



Etapa 3: escrever uma equação e calcular ψ .

Os ângulos internos do $\triangle CBD$ são ψ , ψ e $(180^\circ - \theta)$, e sabemos que os ângulos internos de qualquer triângulo somam 180° .

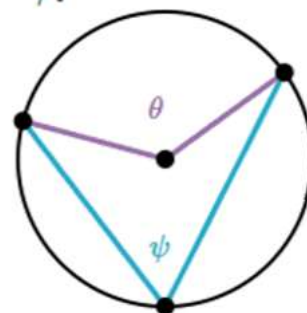
$$\psi + \psi + (180^\circ - \theta) = 180^\circ$$

$$2\psi + 180^\circ - \theta = 180^\circ$$

$$2\psi - \theta = 0$$

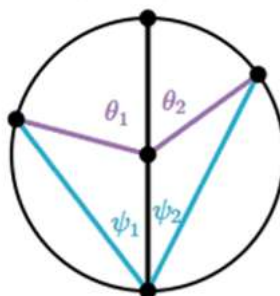
$$2\psi = \theta \quad \text{Finalizamos nossa demonstração do Caso A. Só faltam mais dois casos!}$$

Caso B: o diâmetro está entre os dois ângulos inscritos ψ .



Etapa 1: desenhar o diâmetro

Usando o diâmetro, vamos dividir ψ em ψ_1 e ψ_2 e θ em θ_1 e θ_2 , assim:



Etapa 2: usar o que aprendemos com o Caso A para estabelecer duas equações.

Em nosso novo diagrama, o diâmetro divide a circunferência em duas metades. Cada metade tem um ângulo inscrito com um raio sobre o diâmetro. Essa é a mesma situação que no Caso A, então sabemos que

$$(1) \quad \theta_1 = 2\psi_1$$

e

$$(2) \quad \theta_2 = 2\psi_2 \quad (\text{como no caso A})$$

Etapa 3: somar as equações.

$$\theta_1 + \theta_2 = 2\psi_1 + 2\psi_2$$

Some (1) e (2)

$$(\theta_1 + \theta_2) = 2(\psi_1 + \psi_2)$$

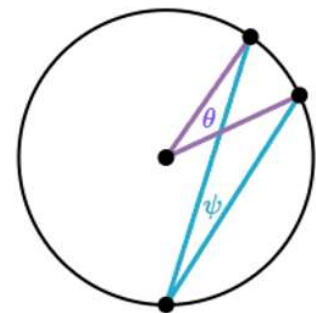
Agrupe as variáveis

$$\theta = 2\psi$$

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 \text{ e } \psi = \psi_1 + \psi_2$$

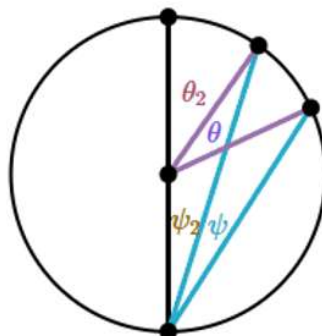
O Caso B está finalizado. Falta só um!

Caso C: o diâmetro está fora dos raios do ângulo inscrito.



Etapa 1: ser esperto e desenhar o diâmetro

Usando o diâmetro, vamos criar dois novos ângulos: θ_2 e ψ_2 , assim:



Etapa 2: como Caso A, estabelecer duas equações.

De modo similar ao que fizemos no Caso B, criamos um diagrama que nos permite usar o que aprendemos no Caso A. Com base nesse diagrama, sabemos o seguinte:

$$(1) \quad \theta_2 = 2\psi_2$$

$$(2) \quad (\theta_2 + \theta) = 2(\psi_2 + \psi)$$

Etapa 3: substituir e simplificar.

$$(\theta_2 + \theta) = 2(\psi_2 + \psi)$$

$$(2\psi_2 + \theta) = 2(\psi_2 + \psi) \quad \theta_2 = 2\psi_2$$

$$2\psi_2 + \theta = 2\psi_2 + 2\psi$$

$$\theta = 2\psi$$

Pronto! Demonstramos que $\theta = 2\psi$ em todos os três casos.