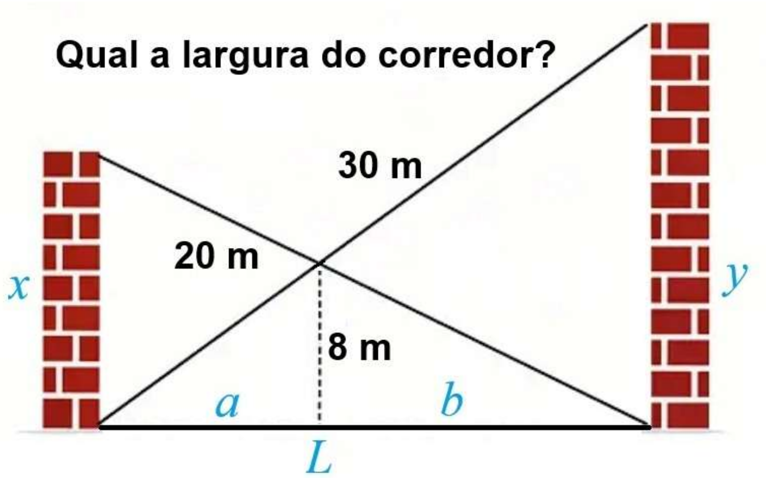


Por semelhança de triângulos:

$\frac{x}{L} = \frac{8}{b} \rightarrow b = \frac{8L}{x}$

$\frac{y}{L} = \frac{8}{a} \rightarrow a = \frac{8L}{y}$

$\rightarrow L = a + b \rightarrow L = \frac{8L}{y} + \frac{8L}{x} \rightarrow \frac{1}{8} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x}$ (*)

Por Pitágoras: $x = \sqrt{400 - L^2}$ e $y = \sqrt{900 - L^2}$

Substituindo em (*): $\frac{1}{8} = \frac{1}{\sqrt{900-\ ^2}} + \frac{1}{\sqrt{400-L^2}}$

Ou: $\frac{1}{8} - \frac{1}{\sqrt{900-L^2}} = \frac{1}{\sqrt{400-L^2}} \rightarrow$ $\frac{1}{64} - \frac{1}{4\sqrt{900-L^2}} + \frac{1}{900-L^2} = \frac{1}{400-L^2}$

Isolando a fração com raiz $\frac{1}{4\sqrt{900-L^2}} = \frac{1}{64} + \frac{1}{900-L^2} - \frac{1}{400-L^2}$

Elevando ao quadrado: $\frac{1}{16(900-L^2)} = \left(\frac{1}{64} + \frac{1}{900-L^2} - \frac{1}{400-L^2}\right)^2$

Expandindo o segundo membro, fica:

$$\frac{1}{4096} + \frac{1}{32(900-L^2)} - \frac{1}{32(400-L^2)} + \frac{1}{(900-L^2)^2} - \frac{2}{(900-L^2)(400-L^2)} + \frac{1}{(400-L^2)^2}$$

Organizando e eliminando (L^2-900) $\frac{-1}{16} = \frac{(328000-1300L^2+L^4)^2}{4096(-900+L^2)(-400+L^2)^2}$

Multiplicando cruzado (para eliminar as frações):

$$-4096(-900+L^2)(-400+L^2)^2 - 16(328000-1300L^2+L^4)^2 = 0$$

Expandindo:

$$-1131520000000 + 10040320000L^2 - 30572800L^4 + 37504L^6 - 16L^8 = 0$$

Com $q = L^2$, ficamos com:

$$16q^4 - 37504q^3 + 30572800q^2 - 10040320000q + 1131520000000 = 0$$

Suas raízes reais (+ e -) para L são aproximadamente: **16,2121259cm** e 19,09612090

O 19,09612090 produz $x = \sqrt{400 - L^2} \sim 5{,}9\ (< 8)$

Com outras substituições:

Ou: $\frac{1}{8}$ - $\frac{1}{\sqrt{900-L^2}} = \frac{1}{\sqrt{400-L^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{900-L^2}-8}{8\sqrt{900-L^2}} = \frac{1}{\sqrt{400-L^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{900-L^2}-8}{\sqrt{900-L^2}} = \frac{8}{\sqrt{400-L^2}}$

Elevando ao quadrado: $\frac{900-L^2-16\sqrt{900-L^2}+64}{(900-L^2)} = \frac{64}{400-L^2}$

Arrumando: $\frac{964-\quad ^{2}-16\sqrt{900-L^2}}{900\quad ^{2}} = \frac{64}{400-L^2}$

Ou ainda: $\frac{-1\quad\sqrt{900\quad ^{2}}}{900\quad ^{2}} = \frac{64}{400-L^2}$ - $\frac{964-L^2}{900-L^2} = \frac{64(900-L^2)-(964-L^2)(400-L^2)}{(400-L^2)(900-L^2)}$

Arrumando e simplificando $(900\text{-}L^2)$: $16\sqrt{900-L^2}$ = $\frac{(385600-1364L^2+L^4)-(57600-64L^2)}{400-L^2}$

Ou ainda: $16\sqrt{900-L^2}$ = $\frac{328000-1300\quad ^{2}+L^4}{400-L^2}$

Elevando ao quadrado: $256(900-L^2)$ = $\frac{(328000-1300L^2+L^4)^2}{(400-L^2)^2}$

Arrumando:

$256(900 - L^2)(400 - L^2)^2 - (328000 - 1300L^2 + L^4)^2 = 0$

Expandindo: $L^8 - 2344L^6 + 1910800L^4 - 627520000L^2 + 70720000000 = 0$

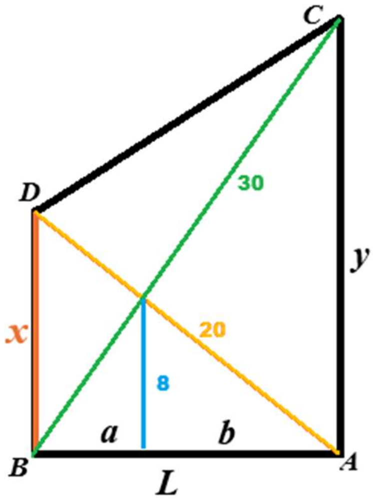
Com $q = L^2$, ficamos com: $q^4 - 2344L^3 + 1910800q^2 - 627520000q + 70720000000 = 0$

Suas raízes reais (+ e -) para $\boldsymbol{L}$ são aproximadamente: **16,2121259cm** e 19,09612090

O 19,09612090 produz $x = \sqrt{400 - L^2} \sim 5{,}9\ (< 8)$

Com outras substituições diferentes (para achar o x e depois o L):

Sejam A, B, C e D os vértices de um trapézio com os ângulos A e B retos. As diagonais BC e AD medem respectivamente **30** cm e **20** cm e se cruzam a **8** cm da base AB. Neste caso, o lado BD satisfaz a seguinte equação: $\mathbf{x^4 - 16x^3 + 500x^2 - 8000x + 32000 = 0}$.



$\frac{x}{L} = \frac{8}{b} \rightarrow \frac{b}{L} = \frac{8}{x}$

$\frac{y-8}{b} = \frac{y}{L} \rightarrow \frac{y-8}{y} = \frac{b}{L} = \frac{8}{x} \rightarrow \frac{y-8}{y} = \frac{8}{x} \rightarrow x(y - 8) = 8y \rightarrow xy - 8x = 8y \rightarrow xy - 8y = 8x$

Então: $y = \frac{8x}{x-8}$ $(*)$

Agora, $y^2 + L^2 = 900$

e $x^2 + L^2 = 400 \rightarrow y^2 - x^2 = 500$

Substituindo $(*)$:

$\left(\frac{8x}{x-8}\right)^2 - x^2 = 500 \rightarrow 64x^2 = (x^2 + 500)(x - 8)^2 = (x^2 + 500)(x^2 - 16x + 64).$

Desenvolvendo: $64x^2 = x^4 - 16x^3 + 64x^2 + 500x^2 - 8000x + 32000$

Ou: $\underline{\mathbf{x^4 - 16x^3 + 500x^2 - 8000x + 32000 = 0}}$

Suas raízes reais são aproximadamente: $x \sim$ **11,71183051cm** e 5, 94 (<8)

Assim, $L = \sqrt{400 - L^2} \sim$ **16,2121259 cm**