

Uma equação polinomial do quinto grau: $x^5 + 10x^3 + 20x - 4 = 0$

Vi uma postagem na internet, onde WEI SHEN resolvia este polinômio de seguinte maneira:

Com a mudança de variável: $x = u - \frac{2}{u}$, ficou $u^5 - \frac{32}{u^5} - 4 = 0$

Com uma nova mudança: $t = u^5$, fica $t^2 - 4t - 32 = 0$, cuja solução é $\{-4, 8\}$.

Uso $r \text{ cis } \theta$ para resumir $r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

$$t_1 = -4 \rightarrow u^5 = -4 \rightarrow u_1 = \sqrt[5]{-4} = \sqrt[5]{4} \text{cis } \pi = \sqrt[5]{4} \text{cis } \left(\frac{(2n+1)\pi}{5}\right), n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$u_1 = \sqrt[5]{4} \text{cis } \left\{ \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi, \frac{7\pi}{5}, \frac{9\pi}{5} \right\}$$

$$t_2 = 8 \rightarrow u^5 = 8 \rightarrow u_2 = \sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{8} \text{cis } 0 = \sqrt[5]{8} \text{cis } \left(\frac{2n\pi}{5}\right), n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$u_2 = \sqrt[5]{8} \text{cis } \left\{ 0, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5} \right\}$$

WEI SHEN parou por aí, lembrando que bastaria substituir para achar os valores de x .

Vou tentar (outra hora) descobrir por que esta mudança $x = u - \frac{2}{u}$ e sua abrangência em outros polinômios.

Eu fiz as substituições. Se $u = r \text{ cis } \theta$, teremos que $x = u - \frac{2}{u} = r \text{ cis } \theta - \frac{2}{r \text{ cis } \theta}$, ou seja

$$x = r \cos \theta + i r \sin \theta - \frac{2}{r \cos \theta + i r \sin \theta} = r \cos \theta + i r \sin \theta - \frac{2(r \cos \theta - i r \sin \theta)}{(r \cos \theta + i r \sin \theta)(r \cos \theta - i r \sin \theta)}$$

$$x = r \cos \theta + i r \sin \theta - \frac{2r \cos \theta - 2i r \sin \theta}{r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = r \cos \theta + i r \sin \theta - \frac{2r \cos \theta - 2i r \sin \theta}{r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}$$

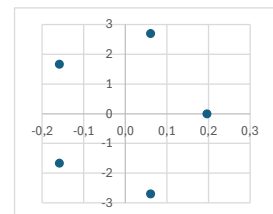
$$\text{Então, } x = r \cos \theta + i r \sin \theta - \frac{2r \cos \theta - 2i r \sin \theta}{r^2} = r \cos \theta + i r \sin \theta - (2/r) \cos \theta + (2/r)i \sin \theta$$

$$\text{Ou seja, } x = (r - 2/r) \cos \theta + (r + 2/r)i \sin \theta$$

Agora, então, podemos calcular os valores de x

$$x_1 = \left(\sqrt[5]{4} - \frac{2}{\sqrt[5]{4}}\right) \cos \left(\frac{(2n+1)\pi}{5}\right) + \left(\sqrt[5]{4} + \frac{2}{\sqrt[5]{4}}\right) i \sin \left(\frac{(2n+1)\pi}{5}\right), \text{ com } n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$\text{Com } n = 2, \text{ teremos } \left(\frac{2}{\sqrt[5]{4}} - \sqrt[5]{4}\right) \sim 0,1962086557$$



$$x_2 = \left(\sqrt[5]{8} - \frac{2}{\sqrt[5]{8}}\right) \cos \left(\frac{2n\pi}{5}\right) + \left(\sqrt[5]{8} + \frac{2}{\sqrt[5]{8}}\right) i \sin \left(\frac{2n\pi}{5}\right), \text{ com } n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$\text{Com } n = 0, \text{ teremos } \left(\sqrt[5]{8} - \frac{2}{\sqrt[5]{8}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt[5]{4}} - \sqrt[5]{4}\right) (\text{Com } n = 2, \text{ em } x_1) \sim 0,1962086557$$

Na verdade, as cinco raízes em x_1 são as mesmas raízes em x_2 (não na mesma ordem).

Em números decimais (Excel), fica:

n =	0	1	2	3	4	
$x_1 =$	-0,15874	0,06063	0,19621	0,06063	-0,15874	rel
	1,66650	2,69646	0	-2,69646	-1,66650	i
$x_2 =$	0,19621	0,06063	-0,15874	-0,15874	0,06063	rel
	0	2,69646	1,66650	-1,66650	-2,69646	i
n =	0	1	2	3	4	

Eu não conhecia (e não sei como WEI SHEN chegou n)a mudança $x = u - \frac{2}{u}$. Vou ver depois (pg. 5).

Eu fiz a resolução numérica usando Newton-Raphson com Briot-Ruffini (ver pg. 4)

Certamente, há uma raiz real (polinômio de grau ímpar).

Partindo de um “chute” inicial $x_0 = 1$ (poderia ser outro) no Excel, temos:

		1	0	10	0	20	-4					1	0,196209	10,0385	1,96964	20,38646
$x_0 =$	1	1	1	11	11	31	27	= P		$x_0 =$	1	1	1,196209	11,23471	13,20435	33,59081
	1	1	2	13	24	55	= P'				1	1	2,196209	13,43092	26,63526	
$x_1 = x_0 - P/P'$		1	0	10	0	20	-4					1	0,196209	10,0385	1,96964	20,38646
$x_1 = 0,509090909$	1	0,509091	10,25917	5,222852	22,65891	7,535443	= P		$x_1 =$	-0,26114049	1	-0,06493	10,05545	-0,65625	20,55783	
0,509090909	1	1,018182	10,77752	10,70959	28,11106	= P'				-0,26114049	1	-0,32607	10,1406	-3,30437		
$x_2 = x_1 - P/P'$		1	0	10	0	20	-4					1	0,196209	10,0385	1,96964	20,38646
$x_2 = 0,241031186$	1	0,241031	10,0581	2,424315	20,58434	0,961467			$x_2 =$	5,960269876	1	6,156479	46,73277	280,5096	1692,299	
0,241031186	1	0,482062	10,17429	4,876636	21,75976					5,960269876	1	12,11675	118,9519	989,4948		
		1	0	10	0	20	-4					1	0,196209	10,0385	1,96964	20,38646
$x_3 = 0,196845637$	1	0,196846	10,03875	1,976084	20,38898	0,013482			$x_3 =$	4,250003939	1	4,446213	28,93492	124,9432	551,3954	
0,196845637	1	0,393691	10,11624	3,967422	21,16995					4,250003939	1	8,696217	65,89387	404,9924		
		1	0	10	0	20	-4					1	0,196209	10,0385	1,96964	20,38646
$x_4 = 0,19620877$	1	0,196209	10,0385	1,969641	20,38646	2,42E-06			$x_4 =$	2,888508252	1	3,084717	18,94873	56,7032	184,1741	
0,19620877	1	0,392418	10,11549	3,95439	21,16235					2,888508252	1	5,973225	36,20244	161,2742		
		1	0	10	0	20	-4					1	0,196209	10,0385	1,96964	20,38646
$x_5 = 0,196208656$	1	0,196209	10,0385	1,96964	20,38646	7,9E-14			$x_5 =$	1,746514865	1	1,942724	13,43149	25,42794	64,79674	
0,196208656	1	0,392417	10,11549	3,954388	21,16235					1,746514865	1	3,689238	19,8748	60,13958		
		1	0	10	0	20	-4					1	0,196209	10,0385	1,96964	20,38646
$x_6 = 0,196208656$	1	0,196209	10,0385	1,96964	20,38646	0			$x_6 =$	0,669075701	1	0,865284	10,61744	9,07351	26,45733	
0,196208656	1	0,392417	10,11549	3,954388	21,16235					0,669075701	1	1,53436	11,64404	16,86426		

Achamos uma raiz real (claro, a mesma que WEI SHEN) e parece não haver outra (tabela à direita)

Partiremos, para as raízes complexas, também com Newton-Raphson com Briot-Ruffini.

Partindo de um “chute” inicial $z_0 = 1 - 2i$, no Excel, conseguimos: **-0,15873614 + 1,666503135 i**
(cálculos na próxima página)

Seu conjugado, também é raiz: **-0,15873614 - 1,666503135 i**

As outras duas raízes, conseguimos por Bhaskara em: **1 -0,12126362 7,274565814**
(próxima página)

$$\Delta = -29,0835584 \rightarrow z = \frac{0,12126362}{2} \pm \frac{\sqrt{29,0835584}}{2} i = 0,060631809 \pm 2,696458714 i$$

[illegible]

Para quem não conhece o método de Brio- Ruffini para substituir $x = X$ em $P_n(x)$:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = (a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + a_2x^{n-3} + \dots + a_{n-2}x + a_{n-1})x + a_n$$

$$P_n(x) = (a_0x^{n-2} + a_1x^{n-3} + a_2x^{n-4} + \dots + a_{n-2})x + a_{n-1})x + a_n = \dots$$

$$P_n(x) = ((\dots((a_0x + a_1)x + a_2)x + \dots + a_{n-2})x + a_{n-1})x + a_n. \text{ Com } b_1 = a_0x + a_1, \text{ fica:}$$

$$P_n(x) = ((\dots(b_1x + a_2)x + \dots + a_{n-2})x + a_{n-1})x + a_n. \text{ Com } b_2 = b_1x + a_2, \text{ fica:}$$

$$P_n(x) = ((\dots b_2x + \dots + a_{n-2})x + a_{n-1})x + a_n. \text{ Com } b_3 = b_2x + a_3, \dots \text{ fica:}$$

$$P_n(x) = b_{n-1}x + a_n = b_n = \mathbf{P}$$

O método de Brio- Ruffini para dividir $P_n(x)$ por $(x - X)$:

$$P_n(x) \div (x - X) = Q(x), \text{ com resto } P \iff (x - X)Q(x) + P = P_n(x)$$

$$(x - X)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1}) + P =$$

$$b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x^2 + b_{n-1}x - Xb_0x^{n-1} - Xb_1x^{n-2} - Xb_2x^{n-3} - \dots - Xb_{n-2}x - Xb_{n-1}) + P =$$

$$b_0x^n + (b_1 - Xb_0)x^{n-1} + (b_2 - Xb_1)x^{n-2} + \dots + (b_{n-1} - Xb_{n-2})x - Xb_{n-1} + P =$$

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x - a_n = P_n(x)$$

	P _n (x)				a ₀	a ₁	a ₂	...	a _{n-1}	a _n	
X	Q(x)			P	X	b ₀	b ₁	b ₂	...	b _{n-1}	P
X	...	P'			X	c ₀	c ₁	c ₂	...	P'	

$$c_0 = b_0 = a^0$$

$$b_{k+1} = X \cdot b_k + a_{k+1}$$

$$c_{k+1} = X \cdot c_k + b_{k+1}$$

Justificativa para P: $P(x) = (x - X) \cdot Q(x) + P \rightarrow \mathbf{P(X) = P}$

Justificativa para P': $P'(x) = (x - X) \cdot Q'(x) + Q(x) \rightarrow \mathbf{P'(X) = Q(X) = P'}$

Um procedimento adaptado pode ser usado para números complexos. Usando $z = a + bi$, teremos que $(x - z) \cdot (x - z') = (x - a - bi) \cdot (x - a + bi) = x^2 - rx - s$, com $r = 2a$ e $s = -(a^2 + b^2)$.

Então, $P(x) = (x^2 - rx - s) \cdot Q(x) + S(x - r) + R$. Assim $P(z) = S(z - r) + R = \mathbf{(R - S.a) + (S.b)i}$.

O cálculo de S e R pode ser feito pelo algoritmo seguinte:

	P_n				a_0	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_n		
r					r	b_1	b_2	...	b_{n-1}	b_n	$\mathbf{b_k = r \cdot T_{k-1}}$	
s					s		c_2	...	c_{n-1}	c_n	$\mathbf{c_k = s \cdot T_{k-2}}$	
		Q	S	R		T_0	T_1	T_2	...	T_{n-1}	T_n	$\mathbf{S = T_{n-1}}$ $\mathbf{R = T_n}$

Também, $P'(x) = (2x - r)Q(x) + (x^2 - rx - s) \cdot Q'(x) + S \rightarrow P'(z) = (2z - r) \cdot Q(z) + S = 2 \cdot b \cdot Q(z)i + S$, onde $Q(z)$ pode ser calculado como $P(z)$, usando os coeficientes T_k de Q:

	Q	S	R		T_0	T_1	T_2	...	T_{n-1}	T_n
r					r			...		
s					s			...		
		p q				T'_0	T'_1	...	p q	

$$P'(z) = 2 \cdot b \cdot Q(z)i + S = 2 \cdot b \cdot [(q - p.a) + (p.b)i]i + S = [2 \cdot b \cdot q - 2b \cdot p.a + 2b^2 \cdot p]i + S =$$

$$= \mathbf{S - 2b^2p + (2bq - 2abp)i}$$

Trocas das variáveis $x = u - \frac{2}{u}$ e $t = u^5$ em $x^5 + 10x^3 + 20x - 4 = 0$

Estas trocas nos levam à uma equação do segundo grau $t^2 - 4t - 32 = 0$.

Vamos analisar que outras $x = u - \frac{k}{u}$ em $x^5 + ax^3 + bx - c = 0$ fazem o mesmo.

a) Trocar só c : $x^5 + 10x^3 + 20x - c = 0 \rightarrow t^2 - ct - 32 = 0$, para qualquer c

b) Trocar b e c : $x^5 + 10x^3 + bx - c = 0 \rightarrow t^2 + (b - 20)t^{6/5} + ct - 2(b - 20)t^{4/5} - 32 = 0$.
Só com $b = 20$, fica uma equação do segundo grau.

c) Trocar a , b e c : $x^5 + ax^3 + bx - c = 0 \rightarrow$
 $t^2 + (a - 10)t^{8/5} + (-6a + b + 40)t^{6/5} + ct + (12a - 2b - 80)t^{4/5} + (-8a + 80)t^{2/5} - 32 = 0$.
Só com $a = 10$ e $b = 20$ fica uma equação do segundo grau.

d) Trocar k e c : $x^5 + 10x^3 + 20x - c = 0 \rightarrow$
 $t^2 - (5k - 10)t^{8/5} + (10k^2 - 30k + 20)t^{6/5} + ct - (10k^3 - 30k^2 + 20k)t^{4/5} + (5k^4 - 10k^3)t^{2/5} - 32 - k^5 = 0$.
Só com $k = 2$ fica uma equação do segundo grau.

e) Trocar k , b e c : $x^5 + 10x^3 + bx - c = 0 \rightarrow$
 $t^2 - (5k - 10)t^{8/5} + (10k^2 - 30k + b)t^{6/5} + ct - (10k^3 - 30k^2 + bk)t^{4/5} + (5k^4 - 10k^3)t^{2/5} - 32 - k^5 = 0$.
Só com $k = 2$ e $b = 20$ fica uma equação do segundo grau.

f) Trocar tudo k , a , b e c : $x^5 + ax^3 + bx - c = 0 \rightarrow$
 $t^2 - (5k - a)t^{8/5} + (10k^2 - 3ak + b)t^{6/5} + ct - (10k^3 - 3ak^2 + bk)t^{4/5} + (5k^4 - ak^3)t^{2/5} - 32 - k^5 = 0$.
Só com $a = 5k$ e $b = 5k^2$ fica uma equação do segundo grau.

Resumo: O polinômio $x^5 + 5kx^3 + 5k^2x - c = 0$, com a mudança de variáveis

$x = u - \frac{k}{u}$ se transforma numa equação do segundo grau: $t^2 - ct - k^5 = 0$