

Uma Equação exponencial – Milton P Borba

Caso 0) Tudo começou com a equação que apareceu na internet:

$$3^{3x+15} = 4^{x+5}$$

É claro que pode ser resolvida assim: $3^{3(x+5)} = 4^{x+5} \rightarrow 27^{x+5} = 4^{x+5} \rightarrow \left(\frac{27}{4}\right)^{x+5} = 1$

Então, $x+5 = 0 \rightarrow x = -5$

Na ocasião, respondi: E, se fosse 13 no lugar do 15?

Depois, generalizei a situação para $A^{px+q} = B^{rx+s}$, com $r, p \neq 0$, A e B reais positivos e:

Caso 1) $p.s = q.r$, $A^p \neq B^r$ (que é como o caso já apresentado).

Caso 2) $p.s = q.r$, $A^p = B^r$.

Solução: $A^{px+q} = B^{rx+s} \rightarrow A^{px} \cdot A^q = B^{rx} \cdot B^s \rightarrow \left(\frac{A^p}{B^r}\right)^x = \frac{B^s}{A^q} = \left(\frac{B^r}{A^p}\right)^{s/r}$, pois $\frac{p.s}{r} = q$ (vem de $p.s = q.r$)

Neste caso, com $A^p = B^r$, temos que $\left(\frac{A^p}{B^r}\right)^x = \left(\frac{A^p}{B^r}\right)^{-s/r} \rightarrow 1^x = 1^{-s/r}$, que vale para $\forall x \text{ real}$

Caso 3) $A^p \neq B^r$ (independente de $p.s = q.r$ ou não)

Solução: Aplicando $\ln$ em $A^{px+q} = B^{rx+s}$, temos que

$$(px+q)\ln(A) = (rx+s)\ln(B) \rightarrow px\ln(A) - rx\ln(B) = s\ln(B) - q\ln(A)$$

$$\text{Arrumando: } [p\ln(A) - r\ln(B)]x = s\ln(B) - q\ln(A) \rightarrow x = \frac{s\ln(B) - q\ln(A)}{p\ln(A) - r\ln(B)} = \frac{\ln(B^s/A^q)}{\ln(A^p/B^r)}$$

$$\text{Em particular, o caso 0, fica assim: } x = \frac{\ln(B^s/A^q)}{\ln(A^p/B^r)} = \frac{\ln(4^5/3^{15})}{\ln(3^3/4^1)} = \frac{\ln(4/27)^5}{\ln(27/4)} = \frac{5\ln(4/27)}{-1 \cdot \ln(4/27)} = -5$$