1 SISTEMAS DE COORDENADAS

1.1 Objetivos do capítulo

Ao final deste capítulo o aluno deverá:

- Representar pontos em coordenadas polares, cilíndricas e esféricas;
- Representar graficamente curvas escritas em coordenadas polares;
- Transformar equações de um sistema de coordenadas para outro;
- Efetuar translação de eixos coordenados;
- Rotacionar eixos coordenados;
- Simplificar equações por meio de transformação de coordenadas.

1.2 Coordenadas polares no $\mathbb{R}^2$

Até o presente momento, localizamos um ponto no plano por meio de suas coordenadas cartesianas retangulares. Existem outros sistemas de coordenadas. Um sistema bastante utilizado é o sistema de coordenadas polares. Nesse sistema, as coordenadas de um ponto são dadas pelo raio de uma circunferência e um determinado ângulo. Por exemplo, P$(2,\frac{\pi}{4})$ significa que o ponto será marcado sobre uma circunferência de raio r=2 a $\frac{\pi}{4}$ graus do eixo dos x no sentido anti-horário. Veja na figura 1.

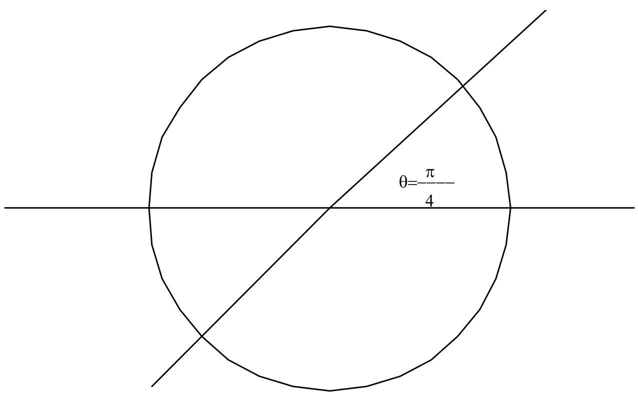


Figura 1: Ponto $P\left(r=2,\theta=\frac{\pi}{4}\right)$ em coordenadas polares

A Figura 2 ilustra um ponto P genérico num sistema de coordenadas polares.

O ponto fixo, denotado por O, é chamado pólo ou origem.

Convenções normalmente usadas:

(i) Se o ângulo $\widehat{AOP}$ for descrito no sentido anti-horário, então $\theta > 0$. Caso contrário, usa-se $\theta < 0$.

(ii) Se $r < 0$, o ponto P estará localizado a180 graus do ângulo $\widehat{AOP}$. Veja na figura 2 a representação do ponto $P\,(-2, 45^o)$

(iii) O par ordenado $(0, \theta)$, sendo θ qualquer, representará uma circunferência de raio $r = 0$ que é denominada pólo.

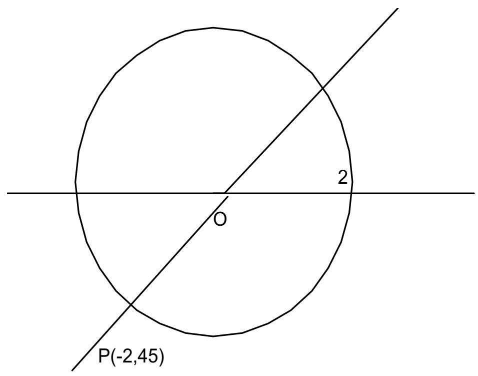


Figura 2:

Geralmente, o sistema de coordenadas polares é descrito como segue:
Um ponto fixo, denotado por O, é chamado pólo ou origem, o semi-eixo coincidindo com o semi-eixo das abscissas é denominado eixo polar, r é o raio da circunferência e o ângulo, dado em pi radianos, é denomiado argumento. Veja na figura 2a, a representação geométrica.
Na fiura 2a, o ponto O é denominado pólo ou origem. A semi-reta fixa $\overrightarrow{OA}$ é chamada eixo polar. O ponto P fica bem determinado através do par (r, θ) em que $|r|$ representa a distância entre a origem O e o ponto P, θ representa a medida do ângulo orientado $\widehat{OAP}$.

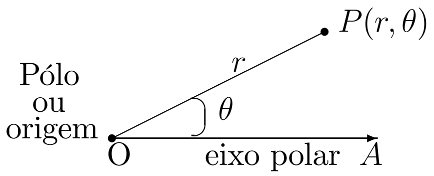


Figura 2a

A Representação num sistema de coordenadas polares dos seguintes pontos $P\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$, $P\left(-2, \frac{\pi}{4}\right)$, é mostrado na Figura 3.

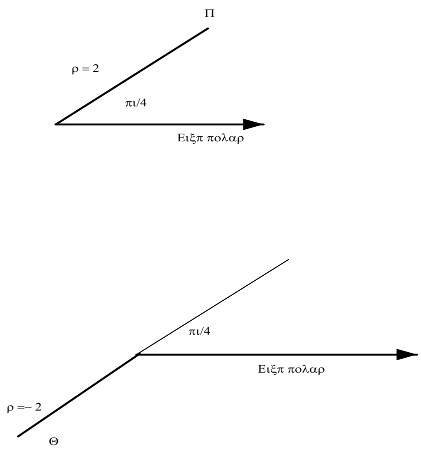


Figura 3:

A Figura 3a mostra os pontos P

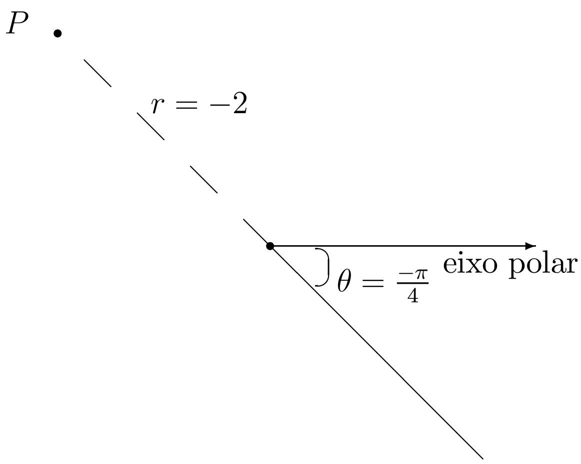


Figura 3a

1.3 Relação entre o Sistema de Coordenadas Cartesianas Retangulares e o Sistema de Coordenadas Polares.

Em várias situações, surge a necessidade de nos referirmos a ambas, coordenadas cartesianas e coordenadas polares de um ponto P. Para visualizar isto, fazemos a origem do primeiro sistema coincidir com o pólo do segundo sistema, o eixo polar com o eixo positivo dos x e o raio para o qual $\theta = \pi/2$ com o eixo positivo dos y (ver Figura 3b).

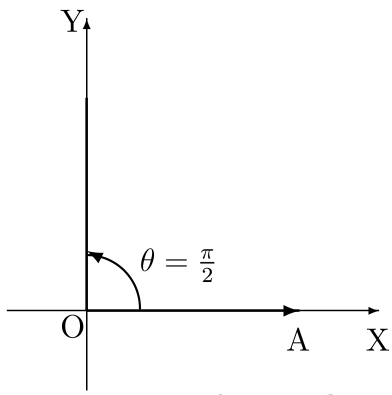
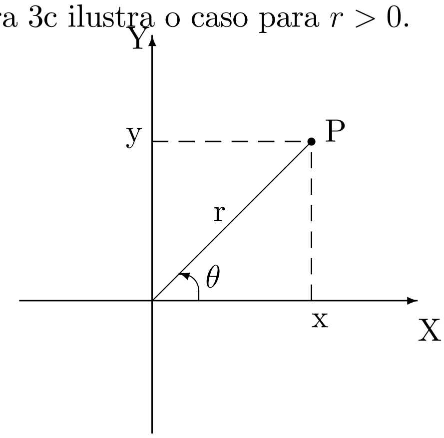


Figura 3b

Supondo que P seja um ponto com coordenadas cartesianas (x, y) e coordenadas polares (r, θ), vamos analisar o caso em que o ponto P está no primeiro quadrante. A Figura 3c ilustra o caso para $r > 0$.



(a)

Figura 3c

Podemos observar que:

(i) Para $r > 0$, temos

$\cos\theta = \frac{x}{r}$ e $\sin\theta = \frac{y}{r}$.

(ii) Para $r < 0$, temos

$\cos\theta = \frac{-x}{-r}$ e $\sin\theta = \frac{-y}{-r}$.

Portanto,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta. \end{cases} \tag{1}$$

Pode-se verificar a validade das relações encontradas, no caso em que o ponto P se encontra sobre um dos eixos ou num outro quadrante.

Usando (1), podemos deduzir outra relação muito usada.

Elevando ambos os membros das equações em (1) ao quadrado, podemos escrever

$$\begin{cases} x^2 = r^2\cos^2\theta \\ y^2 = r^2\sin^2\theta. \end{cases}$$

Adicionando membro a membro, obtemos:

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta$$

ou

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Portanto,

$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}. \tag{2}$$

Exemplo 1 *Encontrar as coordenadas cartesianas do ponto cujas coordenadas polares são* $(-4, 7\pi/6)$.

Solução. A Figura 3d ilustra este ponto.

Temos,

$$\begin{array}{rclcrcl} x &=& r\cos\theta & \quad e \quad & y &=& r\sin\theta \\ &=& -4\cos\frac{7\pi}{6} & & &=& -4\sin\frac{7\pi}{6} \\ &=& -4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) & & &=& -4\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &=& 2\sqrt{3} & & &=& 2. \end{array}$$

Portanto, $(2\sqrt{3}, 2)$ são as coordenadas cartesianas do ponto dado.

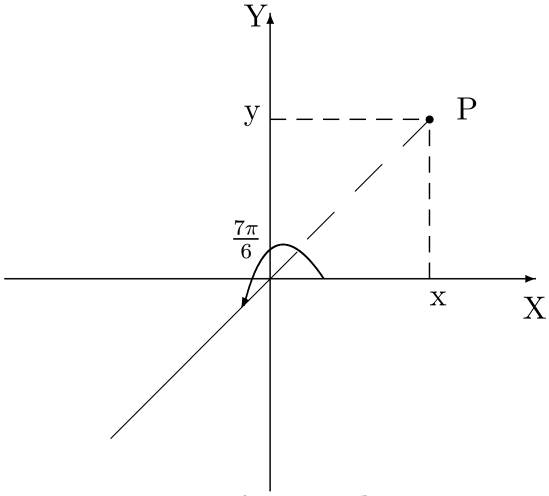


Figura 3d

Exemplo 2 *Encontrar* (r, θ), *supondo* $r < 0$ *e* $0 \leq \theta < 2\pi$ *para o ponto* P, *cujas coordenadas cartesianas são* $(\sqrt{3}, -1)$.

Solução. A Figura 3e ilustra o ponto P.

$$\begin{array}{rcl} r &=& -\sqrt{x^2+y^2} \\ &=& -\sqrt{3+1} \\ &=& -2; \end{array}$$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{-2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e
$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$.

Portanto, $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

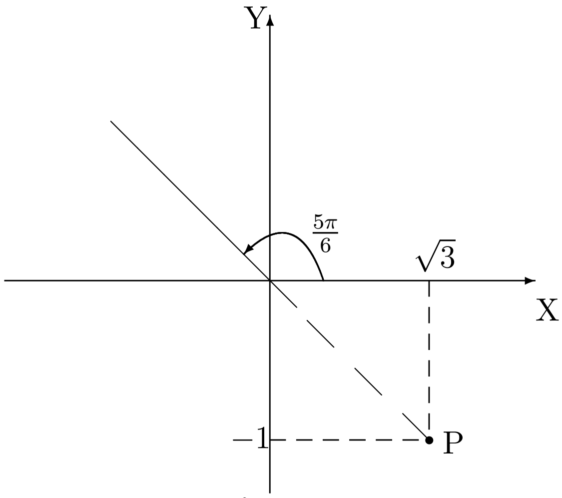


Figura 3e

1.4 Gráfico em coordenadas polares

Para traçar o gráfico de uma curva em coordenadas polares $\rho = f(\theta)$ procede-se como segue:

a) Encontra-se os valores de ρ para alguns arcos notáveis;

b) Elabora-se um disco com setores cujos raios são os valores encontrados para ρ;

c) Marcam-se os pontos interseção do setor do disco com o raio ρ associado ao ângulo correspondente;

d) Unem-se os pontos por meio de uma linha curva contínua.

Exemplo 3 *Traçar o gráfico da curva* $\rho = 4\sqrt{\cos 2\theta}$.

Solução: vamos tomar para 2θ os arcos 0^o, 30^o, 45^o, 60^o e 90^o e seus correspondentes nos outros quadrantes. Assim podemos formar a tabela de valores

θ	2θ	ρ		θ	2θ	ρ		θ	2θ	ρ		θ	2θ	ρ
0	0	4		135	270	0		195	390	3.4		315	630	2
15	30	3.4		150	300	2		202, 5	415	2.8		330	660	2.8
22, 5	45	2.8		157, 5	315	2.8		210	420	2		345	690	3.4
30	60	2		165	330	3.4		225	450	0		360	720	4
45	90	0		180	360	4								

A figura 4 representa a distribuição dos pontos da tabela sobre os setores dum disco e o traçado do gráfico.

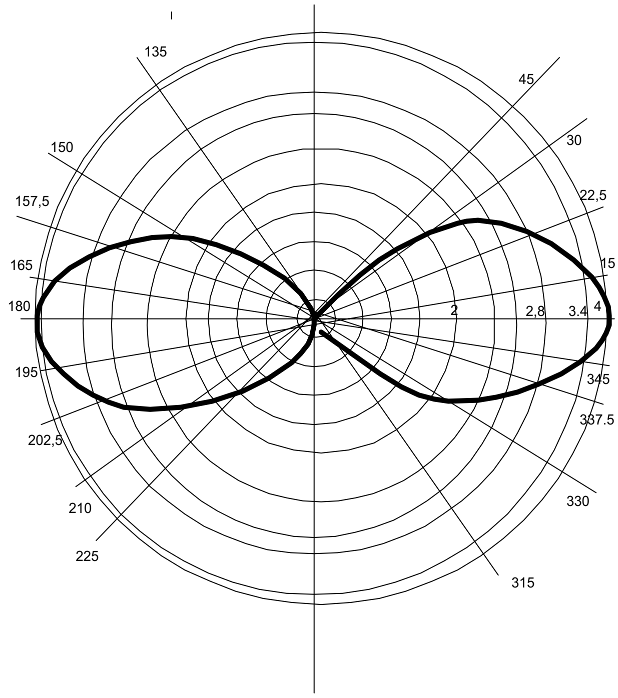


Figura 4:

1.5 Técnicas que facilitam o traçado do gráfico de uma curva em coordenadas polares

O gráfico de $F(r,\theta) = 0$ é formado por todos os pontos cujas coordenadas polares satisfazem a equação. É comum apresentarmos a equação numa forma explícita, isto é, $r = f(\theta)$.

Os seguintes procedimentos poderão nos auxiliar no esboço do gráfico:

1. calcular os pontos de máximo e/ou mínimos;
2. encontrar os valores de θ para os quais a curva passa pelo pólo;
3. verificar simetrias. Se:
   (a) a equação não se altera quando substituirmos r por $-r$, existe simetria em relação à origem;
   (b) a equação não se altera quando substituirmos θ por $-\theta$, existe simetria em relação ao eixo polar, e;

(c) a equação não se altera quando substituirmos θ por $\pi - \theta$, existe simetria em relação ao eixo $\theta = \frac{\pi}{2}$ (que é equivalente ao eixo dos y).

1.5.1 Exemplos

1. Esboçar a curva $r = 2(1 - \cos\theta)$.

Como a equação não se altera ao substituirmos θ por $-\theta$, isto é

$$r = 2(1 - \cos\theta) = 2(1 - \cos(-\theta)),$$

concluímos que existe simetria em relação ao eixo polar. Logo, basta analisar valores de θ tais que $0 \leq \theta \leq \pi$.

Para $0 \leq \theta \leq \pi$, encontramos um ponto de máximo $(4, \pi)$ e um ponto de mínimo $(0, 0)$.

A Tabela 1 mostra alguns pontos da curva, cujo esboço é mostrado na Figura 4a.

Tabela 1

θ	r
0	0
$\frac{\pi}{3}$	1
$\frac{\pi}{2}$	2
$\frac{2\pi}{3}$	3
π	4

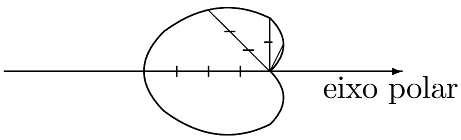


Figura 4a

Esboçar a curva $r = 2\cos 2\theta$.

Analisando as simetrias, temos que

(a) A curva é simétrica em relação ao eixo dos x, pois $r = 2\cos(-2\theta) = 2\cos 2\theta$.

(b) A curva é simétrica em relação ao eixo dos y, pois $r = 2\cos[2(\pi - \theta)] = 2\cos(2\pi - 2\theta) = 2\cos 2\theta$.

Logo, basta fazer uma tabela para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Em $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, a curva passa pelo pólo quando $\theta = \frac{\pi}{4}$, pois $r = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 2\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Podemos ainda verificar que, para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, temos um ponto de máximo $(2, 0)$ e um ponto de mínimo $(-2, \pi/2)$.

Usando a Tabela 2 e os resultados anteriores, esboçamos a curva vista na Figura 4b.

Tabela 2

θ	r
0	2
$\frac{\pi}{6}$	1
$\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{\pi}{3}$	-1
$\frac{\pi}{2}$	-2

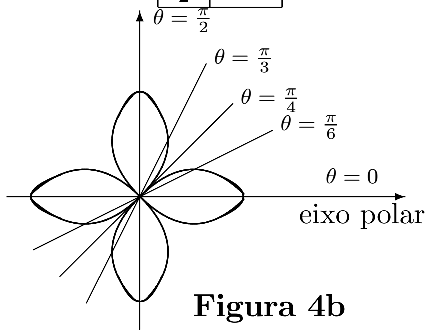


Figura 4b

1.5.2 Algumas Equações em Coordenadas Polares e seus respectivos Gráficos.

1.5.3 Equações de retas.

(a) $\theta = \theta_0$ ou $\theta = \theta_0 \pm n\pi$, $n \in Z$ é uma reta que passa pelo pólo e faz um ângulo de θ_0 ou $\theta_0 \pm n\pi$ radianos com o eixo polar (ver Figura 4c).

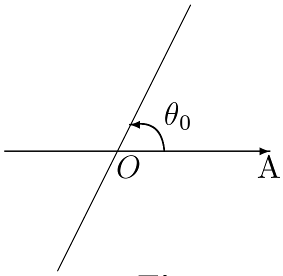
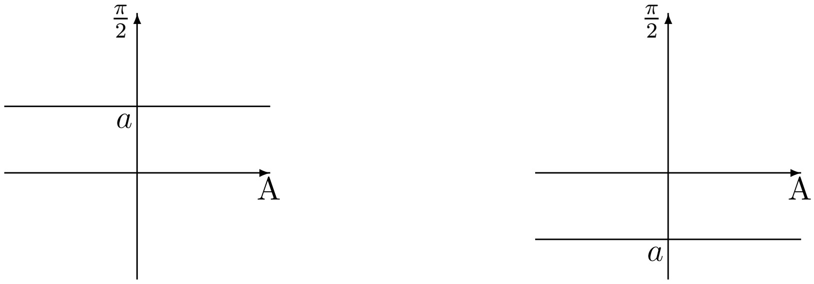


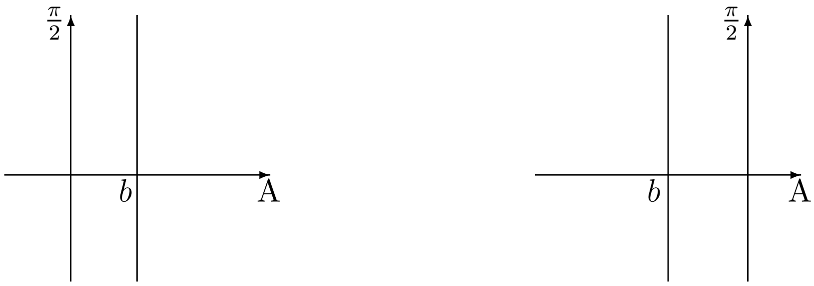
Figura 4c

(b) $r \sin\theta = a$ e $r\cos\theta = b$, $a, b \in \Re$, são retas paralelas aos eixos polar e $\pi/2$, respectivamente (ver Figuras 4d e 4e).



$[r\sin\theta = a,\ a > 0]$ $[r\sin\theta = a,\ a < 0]$

Figura 4d



$[r\cos\theta = b,\ b > 0]$ $[r\cos\theta = b,\ b < 0]$

Figura 4e

1.5.4 Circunferências.

(a) $r = c$, $c \in \Re$ é uma circunferência centrada no pólo e raio $|c|$ (ver Figura 4f).

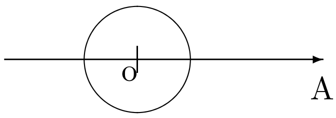


Figura 4f

(b) $r = 2a\cos\theta$ é uma circunferência de centro no eixo polar, tangente ao eixo $\theta = \pi/2$:

se $a > 0$, o gráfico está à direita do pólo;

se $a < 0$, o gráfico está à esquerda do pólo (ver Figura 4g).

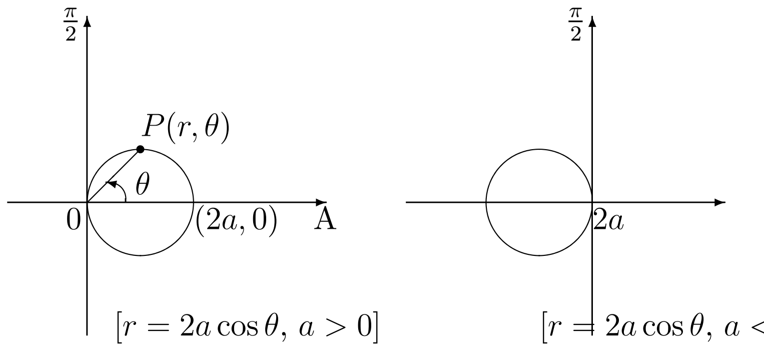
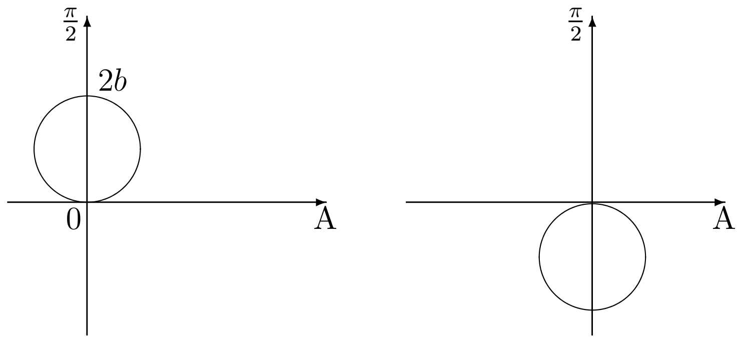


Figura 4g

(c) $r = 2b\sin\theta$ é uma circunferência de centro no eixo $\pi/2$ e que tangencia o eixo polar:

se $b > 0$, o gráfico está acima do pólo;

se $b < 0$, o gráfico está abaixo do pólo (ver Figura 4h).



[$r = 2b\sin\theta,\ b > 0$] [$r = 2b\sin\theta,\ b < 0$]

Figura 4h

1.5.5 Limaçons.

$r = a \pm b\cos\theta$ ou $r = a \pm b\sin\theta$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ são limaçons.

Temos,

se $b > a$, então o gráfico tem um laço (ver Figura 4i);

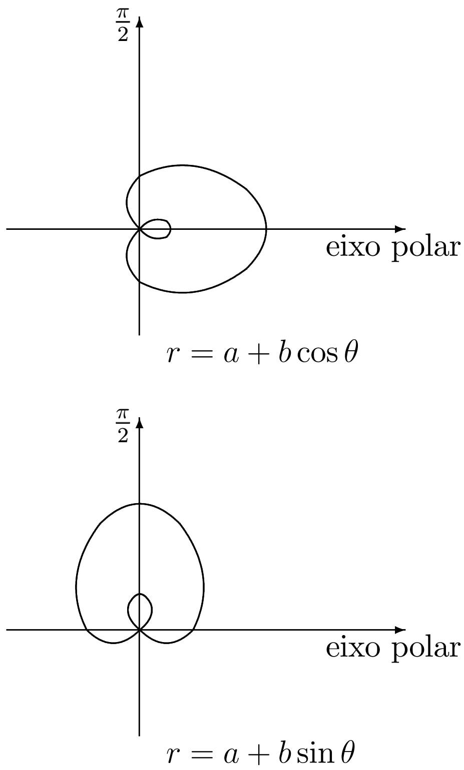
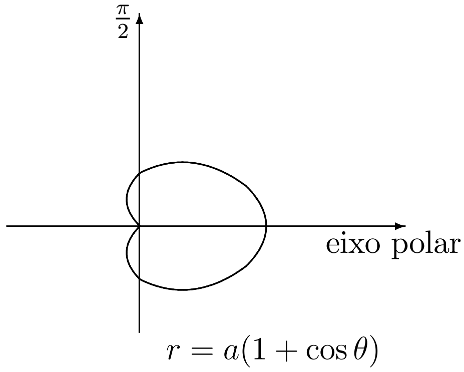


Figura 4i

se $b = a$, então o gráfico tem o formato de um coração, por isso é conhecido como Cardióide (ver Figura 4j);



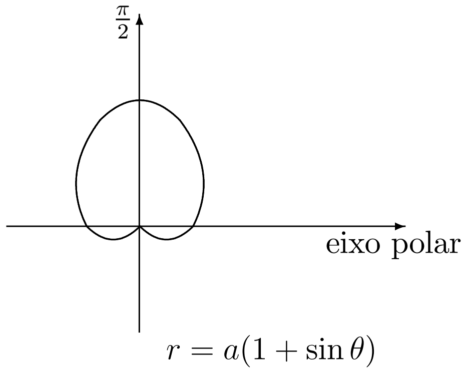


Figura 4j

se $b < a$, então o gráfico não tem laço (ver Figura 4l).

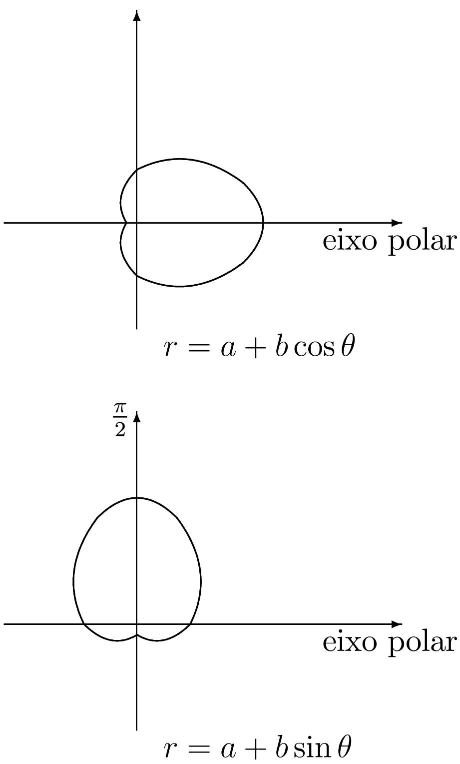


Figura 4l

Observamos que na Figura 4i usamos $a = 1$ e $b = 2$, na Figura 4j usamos $a = b = 1$ e na Figura 4l usamos $a = 3$ e $b = 2$.

$r = a\cos n\theta$ ou $r = a\sin n\theta$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ são rosáceas:

se n for par temos uma rosácea de $2n$ pétalas (ver Figura 4m);

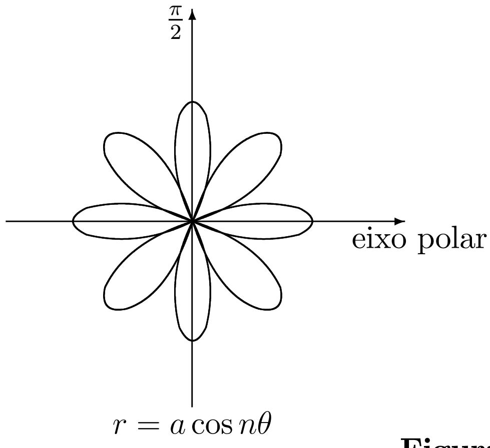


Figura 4m

e n for ímpar a rosásea terá n pétalas (fig 4n)

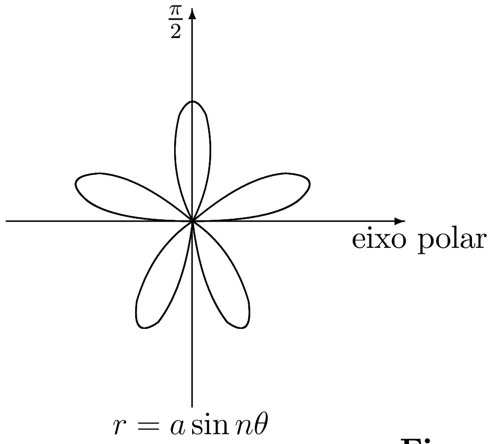
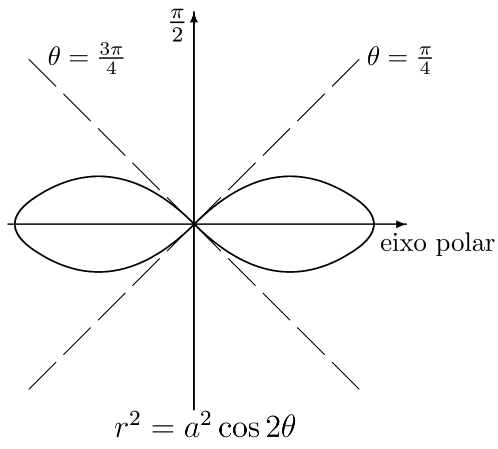


Figura 4n

1.5.6 Lemniscatas.

$r^2 = \pm a^2 \cos 2\theta$ ou $r^2 = \pm a^2 \sin 2\theta$, onde $a \in \Re$ são lemniscatas (ver Figura 4o).



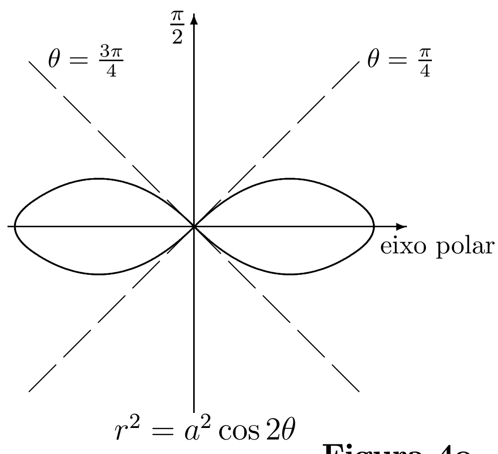


Figura 4o

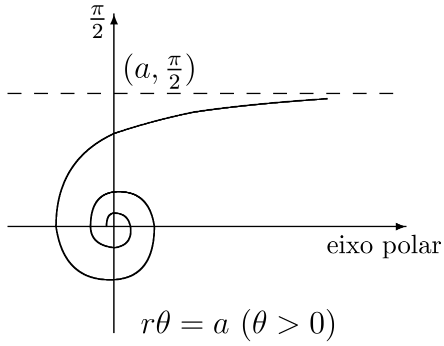
Observamos que na Figura 4o usamos $a = 1$.

1.5.7 Espirais.

As equações seguintes representam algumas espirais:

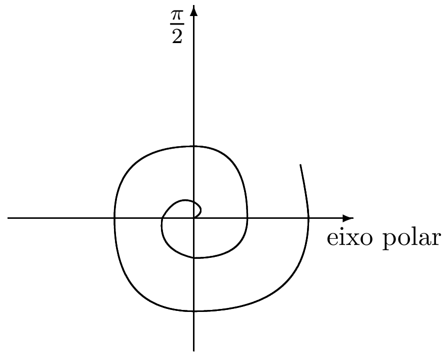
$$
\begin{array}{ll}
(a) & r\theta = a, a > 0 \\
(b) & r = a\theta, a > 0 \\
(c) & r = e^{a\theta} \\
(d) & r^2 = \theta
\end{array}
$$

As Figuras 4p a 4r ilustram estas espirais.



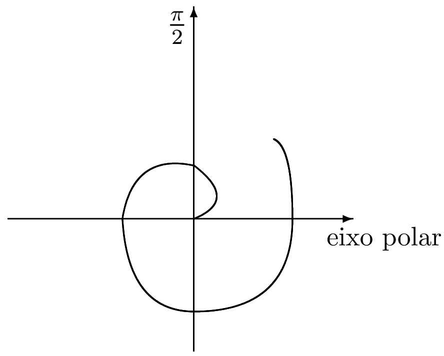
$r\theta = a \ (\theta > 0)$

Figura 4p



$r = a\theta \ (\theta \geq 0)$

Figura 4q



$r = \sqrt{\theta}$

Figura 4r

1.6 EXERCÍCIOS

1. Marcar os seguintes pontos no sistema de coordenadas polares.

   $a)$ $P_1(4, \pi/4)$ $b)$ $P_2(4, -\pi/4)$

   $c)$ $P_3(-4, \pi/4)$ $d)$ $P_4(-4, -\pi/4)$

2. Marcar os seguintes pontos no sistema de coordenadas polares e encontrar suas coordenadas cartesianas.

   $a)$ $P_1(3, \pi/3)$ b $P_2(-3, \pi/3)$

   c $P_3(3, -\pi/3)$ d $P_4(-3, -\pi/3)$

3. Encontrar as coordenadas cartesianas dos seguintes pontos dados em coordenadas polares.

   $a)$ $(-2, 2\pi/3)$ $b)$ $(4, 5\pi/8)$

   $c)$ $(3, 13\pi/4)$ $d)$ $(-10, \pi/2)$

   $e)$ $(-10, 3\pi/2)$ $f)$ $(1, 0)$

4. Encontrar um par de coordenadas polares dos seguintes pontos:

   $a)$ $(1, 1)$ $b)$ $(-1, 1)$

   $c)$ $(-1, -1)$ $d)$ $(1, -1)$

5. Usar os valores dados abaixo para r e θ para descrever os pontos $P_1(\sqrt{3}, -1)$ e $P_2(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, em coordenadas polares.

   $a)$ $r > 0 \ e \ 0 \leq \theta < 2\pi;$ $b)$ $r < 0 \ e \ 0 \leq \theta < 2\pi;$

   $c)$ $r > 0e - 2\pi < \theta \leq 0;$ $d)$ $r < 0 \ e \ \ - 2\pi < \theta \leq 0;$

6. Escrever as equações abaixo em coordenadas polares

   $a)$ $x^2 + y^2 = 4$ $b)$ $x = 4$

   $c)$ $y = 2$ $d)$ $y + x = 0$

   $e)$ $x^2 + y^2 - 2x = 0$ $f)$ $x^2 + y^2 - 6y = 0$

7. escrever em coordenadas retangulares as equações

   $a)$ $r = \cos\theta$ $b)$ $r = 2sen\theta$

   $c)$ $r = \frac{1}{sen\theta + \cos\theta}$ $d)$ $r = a;\ a > 0$

Respostas

$2a)$	$(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$	$5a)$	$P_1(2, \frac{11\pi}{6});\ P_2\left(2, \frac{5\pi}{4}\right)$
$2b)$	$(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$	$5b)$	$P_1(-2, \frac{5\pi}{6});\ P_2\left(-2, \frac{\pi}{4}\right)$
$2c)$	$(\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$	$5c)$	$P_1(2, \frac{\pi}{6});\ P_2\left(2, \frac{-3\pi}{4}\right)$
$2d)$	$(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$	$5d)$	$P_1(-2, -\frac{7\pi}{6});\ P_2\left(-2, -\frac{7\pi}{4}\right)$
$3a)$	$P_1(1, -\sqrt{3})$	$6a)$	$r = \pm 2$
$3b)$	$(-1.5307, 3.6955)$	$6b)$	$r\cos\theta = 4$
$3c)$	$(\frac{-3\sqrt{2}}{2}, \frac{-3\sqrt{2}}{2})$	$6c)$	$rsen\theta = 2$
$3d)$	$(0, -10)$	$6d$	$\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi;\ k \in Z$
$3e)$	$(0, 10)$	$6e)$	$r = 2\cos\theta$
$3f)$	$(1, 0)$	$6f)$	$r = 6sen\theta$
$4a)$	$\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$	$7a)$	$x^2 + y^2 - x = 0$
$4b)$	$\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$	$7b)$	$x^2 + y^2 - 2y = 0$
$4c)$	$\left(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$	$7c)$	$x + y = 1$
		$7d)$	$x^2 + y^2 = a^2$

1.7 Sistemas de coordenadas no $\mathbb{R}^3$

Além do sitema de coordenadas cartesianas retangulares, três outros sistemas são freqüentemente empregados para localizar pontos no espaço. São eles: sistema de coordenadas polares, sistema de cilíndricas e sistema de esféricas.

Sistema de coordenadas retangulares ortogonais

Um ponto $P\,(x, y, z)$ é localizado no R^3 conforme a representação gráfica vista na figura 4r

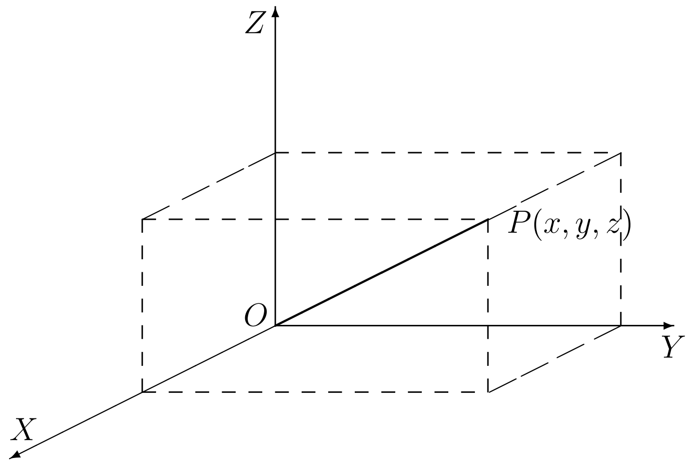


Figura 4r

Note que qualquer ponto no R^3 está localizado num dos vértices do paralelepípedo que tem um dos vértices na origem do sistema, abscissa x, ordenada y e cota z.

1.7.1 Coordenadas polares no espaço tridimensional

As coordenadas polares do ponto P no espaço, Fig. 4s, são $(r, \alpha, \beta, \gamma)$, onde r, raio vetor, designa a distância OP e α, β e γ são ângulos diretores de OP. As relações entre coordenadas polares e retangulares do ponto P são:

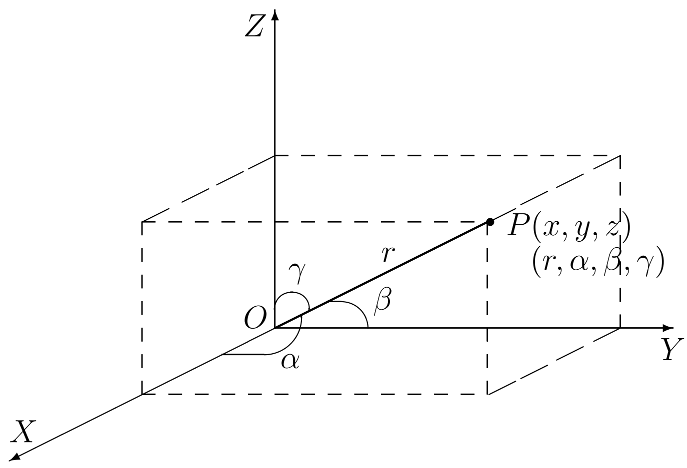


Figura 4s

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\cos\beta \\ z = r\cos\gamma. \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} & r = \pm\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ & \cos\alpha = \tfrac{x}{r}, \\ & \cos\beta = \tfrac{y}{r}, \\ & \cos\gamma = \tfrac{z}{r}, \qquad\qquad r \neq 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Uma vez que $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1$, as quatro coordenadas não são independentes.

Exemplo 4 *Para* $\alpha = 60°$ *e* $\beta = 45°$*, temos* $\cos^2\gamma = 1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta = 1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$*. Da condição* $\gamma \leq 180°$ *deduz-se:* $\gamma = 60°$ *ou* $120°$*.*

Exemplo 5 *As coordenadas polares do ponto* $P(1,-2,2)$ *são determinadas como segue:*

Solução: da equação 4 obtemos

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3.$$

$$\alpha = \arccos \tfrac{x}{r} = \arccos \tfrac{1}{3} = 70°32'$$

$$\beta = \arccos \tfrac{y}{r} = \arccos \left(-\tfrac{2}{3}\right) = 131°49'$$

$$\gamma = \arccos \tfrac{z}{r} = \arccos \tfrac{2}{3} = 48°11'.$$

Resposta: Têm-se $P\,(1, -2, 2) = P(3, 70°32', 131°49', 48°11')$.

Exemplo 6 *As coordenadas cartesianas do ponto, cujas coordenadas polares são* $(3, 120°, 120°, 135°)$ *são determinadas como segue:*

Solução: das equações 4 obtêm-se:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\alpha = 3\cos 120° = -\tfrac{3}{2}, \\ y &= r\cos\beta = 3\cos 120° = -\tfrac{3}{2}, \\ z &= r\cos\gamma = 3\cos 135° = -\tfrac{3\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, $P(3, 120°, 120°, 135°) = P\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

1.8 Coordenadas Cilíndricas

Marcar um ponto em coordenadas cilíndricas consiste em marcá-lo sobre a superfície de um cilindro. Na base do cilindro, a representação das coordenadas do ponto é equivalente à representação das coordenadas polares e a cota é a altura no eixo z. Seja $P(x, y, z)$ um ponto em coordenadas retangulares sua representação em coordenadas cilíndricas será $P\,(r\cos\theta, rsen\theta, z)$ em que:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = rsen\theta \\ z = s \\ r^2 = x^2 + y^2 \text{ e } \theta = arctg\frac{y}{x} \end{cases} \tag{5}$$

Veja a figura 5

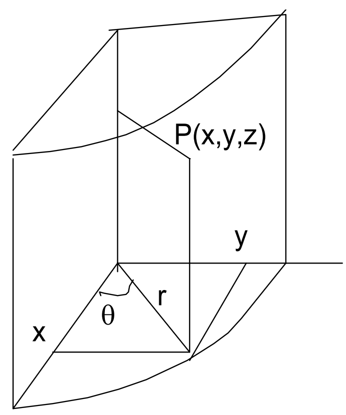


Figura 5: $P\,(x, y, z) = P\,(r\cos\theta, rsen\theta, z)$

A equivalência entre as coordenadas retangulares e cilíndricas é dada por $x = r\cos,\ y = rsen\theta\ \ e\ z = z$. Além disso, tem-se $r^2 = x^2{+}y^2$, $tg\theta = \frac{y}{x}$ e $\theta = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$.

Exemplo 7 *O ponto* $P\,(3, 3, 5)$ *quando escrito em coordenadas cilíndricas tem a forma* $P\left(3\cos\frac{\pi}{4}, 3sen\frac{\pi}{4}, 5\right)$.

Exemplo 8 *As coordenadas cilíndricas do ponto* $P(1, -2, 2)$ *são determinadas como segue:*

Solução: da equação 5 obtemos

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}.$$
$$\theta = \arctan\tfrac{y}{x} = \arctan(\tfrac{-2}{1}) = arct(-2) = 296°34',$$
$$z = 2.$$

Resposta: $(\sqrt{5}, 296°34', 2)$.

Exemplo 9 *As coordenadas cartesianas ortogonais do ponto*$P(6, 120°, -2)$ *dado em coordenadas cilíndricas são determinadas como segue a solução:*

Das equações 5 obtem-se:

$$x = r\cos\theta = 6\cos 120° = -3,$$
$$y = r\sin\theta = 6\sin 120° = 3\sqrt{3},$$
$$z = -2.$$

Portanto, $P(6, 120°, -2) = P(-3, 3\sqrt{3}, -2)$.

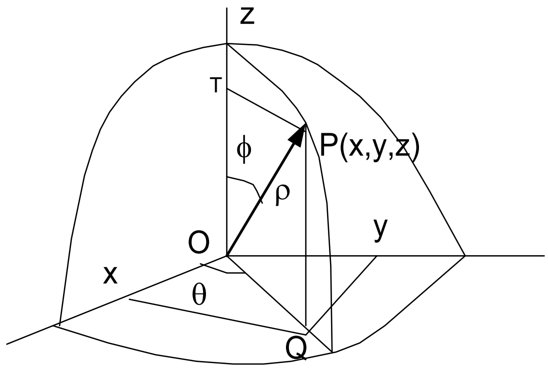


Figura 6: Ponto $P\,(x, y, z)$ representado sobre a superfície esférica.

1.9 Coordenadas esféricas

Seja $P(x, y, z)$ um ponto qualquer do espaço e Q, sua projeção no plano xy. Seja de ρ a distância OP conforme a figura 6. Designemos o ângulo $\widehat{TOP}$ por ϕ. Note que o ângulo ϕ tem origem no pólo norte e se desloca positivamente na direção do pólo sul, de modo que varia de $\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq -\frac{\pi}{2}$. Seja θ o ângulo $\widehat{XOQ}$ em que $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Os elementos ρ, θ e ϕ são denominadas coordenadas esféricas do ponto P e denotado por $P(\rho, \theta, \phi)$; ρ é o raio da esfera, θ é a longitude e ϕ é a co-latitude de P. Para marcar o ponto $P(\rho, \theta, \phi)$ sobre a superfície esférica prodede-se como segue:

- Faz-se o esboço de uma esfera de raio ρ;
- Sobre seu centro representa-se os eixos x, y e z;
- Partindo do eixo x desloca-se θ radianos sobre o equador no sentido positivo;
- Descreve-se o meridiano que parte do pólo norte e passa pela extremidade do arco θ;
- A partir do pólo norte (sobre o meridiano já traçado) descreve-se o ângulo ϕ;
- Na extremindade do arco ϕ localiza-se o ponto P.

1.9.1 Relações entre as coordenadas retangulares e esféricas

Considere o triângulo OXQ localizado sobre a figura 6. Então pode-se escrever:

$$\begin{cases} x = \overline{OQ}\cos\theta \\ y = \overline{OQ}sen\theta \end{cases} \tag{6}$$

Considerendo o triângulo OQP pode-se escreve:

$$\begin{cases} \overline{OQ} = \rho sen\phi \\ z = QP = OT = \rho\cos\phi \end{cases} \tag{7}$$

Substituindo o $\overline{OQ}$ da equação 7 na equação 6 e adicionando a componente z obtem-se o sistema de coorenadas esféricas dado por:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta sen\phi \\ y = \rho sen\theta sen\phi \\ z = \rho\cos\phi \end{cases} \tag{8}$$

Além disso, valem as relações

$$\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ tg\theta = \frac{y}{x} \text{ donde vem } \theta = arctg\frac{y}{x} \\ \cos\phi = \frac{z}{\rho}, \text{ donde vem } \phi = \arccos\frac{z}{\rho} \end{cases} \tag{9}$$

Exemplo 10 *As coordenadas esféricas do ponto $P(1,-2,2)$ são determinadas como segue:*

Solução: das equações 8 e 9 vem:

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{1^2+(-2)^2+2^2} = \sqrt{9} = 3.$$

1. $\theta = \arctan\frac{y}{x} = \arctan -2 = 296°34'$,

   $\phi = \arccos\frac{z}{r} = \arccos\frac{2}{3} = 48°11'$,

   Portanto. $P(1,-2,2) = P\ (3, 296°34', 48°11')$.

Exemplo 11 *As coordenadas retangulares do ponto de coordenadas esféricas* $(4,-45°,30°)$ *são determinadas como segue:*

Solução: da equação 8 obtêm-se

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta = 4 \sin 30^\circ \cos(-45^\circ) = \sqrt{2},$$
$$y = \rho \sin\phi \sin\theta = 4 \sin 30^\circ \sin(-45^\circ) = -\sqrt{2},$$
$$z = \rho \cos\phi = 4 \cos 30^\circ = 2\sqrt{3}.$$

Portanto, $P(4, -45^\circ, 30^\circ) = P(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2\sqrt{3})$.

1.9.2 Outros exemplos

Exemplo 12 *Determinar as coordenadas cartesianas, polares e esféricas de um ponto, cujas coordenadas cilíndricas são* $(6, 120^\circ, 4)$.

Solução: – Em coordenadas retangulares obtem-se:

$$x = r\cos\theta = 6\cos 120^\circ = -3,$$
$$y = r\sin\theta = 6\sin 120^\circ = 3,$$
$$z = 4.$$

Portanto, $P(6, 120^\circ, 4) = P(-3, 3\sqrt{3}, 4)$.

Em coordenadas polares.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-3)^2 + (3\sqrt{3})^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}.$$
$$\alpha = \arccos \tfrac{x}{r} = \arccos \tfrac{-3}{2\sqrt{13}} = 114^\circ 35',$$
$$\beta = \arccos \tfrac{y}{r} = \arccos \tfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} = 46^\circ 7',$$
$$\gamma = \arccos \tfrac{z}{r} = \arccos \tfrac{4}{2\sqrt{13}} = 56^\circ 19'.$$

Portanto, $P(6, 120^\circ, 4) = P(2\sqrt{13}, 114^\circ 35', 46^\circ 7', 56^\circ 19')$.

Em coordenadas esféricas obtêm-se

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-3)^2 + (3\sqrt{3})^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$$
$$\theta = \arctan \tfrac{y}{x} = \arctan \tfrac{3\sqrt{3}}{-3} = 120^\circ,$$
$$\phi = \arccos \tfrac{z}{r} = \arccos \tfrac{4}{2\sqrt{13}} = 56^\circ 19',$$

Portanto, $P(6, 120^\circ, 4) = P(2\sqrt{13}, 120^\circ, 56^\circ 19')$.

Exemplo 13 *Escrever a equação $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2x - 3y - z + 2 = 0$ em coordenadas cilíndricas.*

Solução: da equação 5 temos $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ e $z = z$.

Substituindo x, y e z da equação $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2x - 3y - z + 2 = 0$ por $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ e $z = z$ vem

$$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + 2z^2 - 2r\cos\theta - 3r\sin\theta - z + 2 = 0.$$

$$r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) - r(2\cos\theta + 3\sin\theta) + 2z^2 - z + 2 = 0.$$
$$r^2 - r(2\cos\theta + 3\sin\theta) + 2z^2 - z + 2 = 0$$

Exemplo 14 *Escrever a equação $2x^2 + 3y^2 - 6z = 0$ em coordenadas esféricas.*

Solução: das equações 8 e 9 têm-se $x = \rho\sin\phi\cos\theta$, $y = \rho\sin\phi\sin\theta$ e $z = \rho\cos\phi$.

Substituindo os valores de x, y e z na equação $2x^2 + 3y^2 - 6z = 0$ obtemos

$$2\rho^2\sin^2\phi\cos^2\theta + 3\rho^2\sin^2\phi\sin^2\theta - 6\rho\cos\phi = 0$$

ou

$$2\rho\sin^2\phi\cos^2\theta + 3\rho\sin^2\phi\sin^2\theta - 6\cos\phi = 0$$

Exercício 15 *Escrever a equação $\rho + 6\sin\phi\cos\theta + 4\sin\phi\sin\theta - 8\cos\phi = 0$, em coordenadas retangulares.*

Solução: pelo fato de existir os produtos $\sin\phi\cos\theta$ e $\sin\phi\sin\theta$ sabemos que a equação está escrita em coordenadas esféricas. Assim, para obter ρ^2, multiplica-se a equação dada por ρ obtendo-se

$$\rho^2 + 6\rho\sin\phi\cos\theta + 4\rho\sin\phi\sin\theta - 8\rho\cos\phi = 0$$

substituindo-se adequadamente por x, y e z conforme as equações 8 e 9 obtêm-se

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 4y - 8z = 0$$

Esta é a equação de uma esfera com centro em $(-3, -2, 4)$ e raio $r = \sqrt{29}$.

Exemplo 16 *Escrever a equação* $z = r^2 \cos 2\theta$, *expressa em coordenadas cilíndricas em cartesianas ortogonais.*

Solução: da trigonometria sabemos que $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$. Logo podemos escrever

$$z = r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

ou

$$z = r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta \qquad .$$

Como $r\cos\theta = x$ e $r\sin\theta = y$, a equação desejada é

$$z = x^2 - y^2$$

.

Exemplo 17 *Escrever a equação* $x^2 + y^2 - z^2 = 25$ *em uma equação do sistema polar.*

Solução: em coordenadas polares, temos $x = r\cos\alpha$, $y = r\cos\beta$, $z = r\cos\gamma$.

Portanto, a equação $x^2 + y^2 - z^2 = 25$ se transforma em

$$r^2\cos^2\alpha + r^2\cos^2\beta - r^2\cos^2\gamma = 25$$

ou

$$r^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cos^2\gamma) = 25.$$

Sendo $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ vem

$$r^2(1 - 2\cos^2\gamma) = 25.$$

Que é a equação solicitada.

Exemplo 18 *Escrever a equação* $\cos\gamma = r\cos\alpha\cos\beta$, *dada em coordenadas polares, no sistema cartesiano ortogonal.*

Solução: multipliquemos ambos os membros da equação dada por r. Teremos $r\cos\gamma = r^2\cos\alpha\cos\beta$. Como $r\cos\gamma = z$, $r\cos\alpha = x$ e $r\cos\beta = y$, a equação pedida é $z = xy$.

1.10 EXERCÍCIOS

1. Determinar as coordenadas polares dos seguintes pontos:

(a) $(0, 1, 1)$ **(c)** $(1, -2, 2)$ **(e)** $(8, -4, 1)$
(b) $(0, -2, -2)$ **(d)** $(6, 3, 2)$

2. Determinar as coordenadas cilíndricas dos pontos do problema 1.

3. Determinar as coordenadas esféricas do problema1.

4. Determinar as coordenadas retangulares dos pontos, cujas coordenadas polares são:

(a) $(2, 90°, 30°, 60°)$ **(c)** $(4, 120°, 120°, 135°)$ **(e)** $(2, 45°, 120°, -60°)$
(b) $(3, 60°, -45°, 120°)$ **(d)** $(3, 150°, 60°, 90°)$

5. Determinar as coordenadas ortogonais dos pontos, cujas coordenadas cilíndricas são:

(a) $(6, 120°, -2)$ **(c)** $(4, 45°, 2)$ **(e)** $(6, 30°, -3)$
(b) $(1, 330°, -2)$ **(d)** $(8, 120°, 3)$

6. Determinar as coordenadas retangulares dos pontos, cujas coordenadas esféricas são:

(a) $(4, 210°, 30°)$ **(c)** $(6, 330°, 60°)$ **(e)** $(2, 180°, 270°)$
(b) $(3, 120°, 240°)$ **(d)** $(5, 150°, 210°)$

7. Determinar as coordenadas esféricas dos pontos, cujas coordenadas cilíndricas são:

(a) $(8, 120°, 6)$ **(c)** $(6, 135°, 2)$ **(e)** $(12, -90°, 5)$
(b) $(4, 30°, -3)$ **(d)** $(3, 150°, 4)$

8. Transformar as seguintes equações nas correspondentes do sistema esférico.

(a) $3x^2 - 3y^2 = 8z$ **(b)** $x^2 - y^2 - z^2 = a^2$ **(c)** $3x + 5y - 2z = 6$

9. Transformar as coordenadas retangulares das equações dadas em coordenadas cilíndricas:

(a) $5x + 4y = 0$ **(c)** $x^2 + y^2 - 8x = 0$ **(e)** $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$
(b) $5x^2 - 4y^2 + 2x + 3y = 0$ **(d)** $x^2 - y^2 + 2y - 6 = 0$

10. As superfícies dadas por suas equações estão expressas em coordenadas cilíndricas. Escrevê-las no sistema cartesiano ortogonal e identificá-las.

(a) $r^2 + 3z^2 = 36$

(b) $r = a \sin\theta$

(c) $r^2 + z^2 = 16$

(d) $\theta = 45°$

(e) $r^2 - z^2 = 1$

11. Referir ao sistema polar os lugares das seguintes equações cartesianas.

(a) $x^2 + y^2 + 4z = 0$

(b) $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$

(c) $2x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 6x + 2y = 0$

(d) $z = 2xy$

12. Transformar as seguintes equações, dadas em coordenadas esféricas, em equações de coordenadas retangulares:

(a) $r = 5a \cos\phi$

(b) $\theta = 60°$

(c) $r \sin\phi = a$

(d) $r = 4$

13. Transformar as seguintes equações polares em equações cartesianas retangulares:

(a) $r(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) = 5$

(b) $r^2(2\cos^2\alpha - 1) = 25$

(c) $\cos\gamma = r(\cos^2\alpha - \cos^2\beta)$

(d) $r^2 - r^2\cos^2\gamma - 4r\cos\gamma - 2 = 0$

14. Instituir uma fórmula para o cálculo da distância entre dois pontos $P_1(r_1, \theta_1, \phi_1)$, $P_2(r_2, \theta_2, \phi_2)$ no sistema de coordenadas esféricas.
Sugestão. Utilizar a fórmula da distância entre dois pontos expressa em coordenadas retangulares e transformá-la para coordenadas esféricas.

RESPOSTAS

(1a) $(\sqrt{2}, 90°, 45°, 45°)$

(1b) $(2\sqrt{2}, 90°, 135°, 135°)$

(1c) $(3, \arccos(1/3), \arccos(-2/3), \arccos(2/3))$

(1d) $(7, \arccos(6/7), \arccos(3/7), \arccos(2/7))$

(1e) $(9, \arccos(8/9), \arccos(-4/9), \arccos(1/9))$

(2a) $(1, 90°, 1)$

(2b) $(2, 270°, -2)$

(2c) $(\sqrt{5}, 2\pi - \arctan(1/2), 2)$

(2d) $(3\sqrt{5}, \arctan(1/2), 2)$

(2e) $(4\sqrt{5}, 2\pi - \arctan 2, 1)$

(3a) $(\sqrt{2}, 90°, 45°)$

(3b) $(2\sqrt{2}, 270°, 135°)$

(3c) $(3, 2\pi - \arctan 2, \arccos(2/3))$

(3d) $(7, \arctan(1/2), \arccos(2/7))$

(3e) $(9, 2\pi - \arctan(1/2), \arccos(1/9))$

(4a) $(0, \sqrt{3}, 1)$

(4b) $(3/2, 3\sqrt{2}/2, -3/2)$

(4c) $(-2, -2, -2\sqrt{2})$

(4d) $(-3\sqrt{3}/2, 3/2, 0)$

(4e) $(\sqrt{2}, -1, 1)$

(5a) $(-3, 3\sqrt{3}, -2)$

(5b) $(\sqrt{3}/2, -1/2, -2)$

(5c) $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 2)$

(5d) $(-4, 4\sqrt{3}, 3)$

(5e) $(3\sqrt{3}, 3, -3)$

(6a) $(-\sqrt{3}, -1, 2\sqrt{3})$

(6b) $(\frac{3\sqrt{3}}{4}, -\frac{9}{4}, -\frac{3}{2})$

(6c) $(\frac{9}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}, 3)$

(6d) $(\frac{5\sqrt{3}}{4}, -\frac{5}{4}, -\frac{5\sqrt{3}}{2})$

(6e) $(2, 0, 0)$

(7a) $(10, 120°, \arccos(3/5))$

(7b) $(5, 30°, \arccos(-3/5))$

(7c) $(2\sqrt{10}, 135°, \sqrt{10}/10)$

(7d) $(5, 150°, \arccos(4/5))$

(7e) $(13, -90°, \arccos(5/13))$

(8a) $3r\sin^2\phi\cos 2\theta = 8\cos\theta$

(8b) $r^2(\sin^2\phi\cos 2\theta - \cos^2\phi) = a^2$

(8c) $r(3\sin\phi\cos\theta + 5\sin\phi\sin\theta - 2\cos\phi) = 6$

(9a) $\theta = \arctan(-5/4)$

(9b) $5r\cos^2\theta - 4r\sin^2\theta + 2\cos\theta + 3\sin\theta = 0$

(9c) $r - 8\cos\theta = 0$

(9d) $r^2\cos 2\theta + 2r\sin\theta - 6 = 0$

(9e) $r^2 - z^2 = a^2$

(10a) $x^2 + y^2 + 3z^2 = 36$. Elipsóide de revolução.

(10b) $x^2 + y^2 = ay$. Cilindro circular reto.

(10c) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. Esfera.

(10d) $y = x$. Plano.

(10e) $x^2+y^2-z^2 = 1$. Hiperbolóide de uma folha.

(11a) $r(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) + 4\cos\gamma = 0$ ou
$r(1 - \cos^2\gamma) + 4\cos\gamma = 0$

(11b) $r^2(1 - 2\cos^2\gamma) = a^2$

(11c) $r(2 + \cos^2\beta) - 6\cos\alpha + 2\cos\beta = 0$

(11d) $\cos\gamma = 2r\cos\alpha\cos\beta$

(12a) $x^2 + y^2 + z^2 = 5az$

(12b) $y = \sqrt{3}x$

(12c) $x^2 + y^2 = a^2$

(12d) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

(13a) $x + y + z = 5$

(13b) $x^2 - y^2 - z^2 = 25$

(13c) $z = x^2 - y^2$

(13d) $x^2 + y^2 - 4z - 2 = 0$

(14) $\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2[\cos(\theta_2 - \theta_1)\sin\phi_1\sin\phi_2 + \cos\phi_1\cos\phi_2]} = d$

2 Sistemas de coordenadas auxiliares

Um dos principais objetivos da Geometria Analítiva é a determinação das propriedades das curvas e suas configuações geométricas. Algumas, tais como parábolas, elipses, hipérboles, circunferências, retas etc têm equações padronizadas num determinado sistema de coordenadas convencional de centro na origem. Isso permite traçar o esboço gráfico dessas curvas facilmente. Porém, no caso das curvas estarem fora da origem, busca-se um sistema auxiliar de coordenadas com objetivo de reconhecer e esboçar tais curvas sem passar por um trabalho exaustivo. Um sistema auxiliar permite simplificar as equações e representá-las num dos modelos padronizados. Na sequência veremos alguns casos de sistemas auxiliares.

2.1 Transformação de Coordenadas

Como o nome já diz, uma transformação é o processo de mudar uma relação, expressão ou figura em outra.

Assim, pode-se afirmar que uma tranformação é uma operação por meio da qual uma relação, expressão ou figura é mudada em outra de acordo com uma dada lei. Em geral uma transformação de coordenadas consiste na busca de um sistema ortogonal em que se possa escrever uma dada curva na equação padronizada. Veja a figura 6a em que o sitema usual é o sistema cartesiano de eixos coordenados X e Y e centro $(0,0)$. Pelo ponto (h,k) é traçado o sistema auxiliar cujos eixos coordenados são X' e Y'. A interseção dos eixos X' e Y' é tomada como a origem do sistema auxiliar. A figura 6a representa o ponto $P\,(x,y)$ transladado para o sistema $X'Y'$ de centro $\mathrm{O}'(h,k)$.

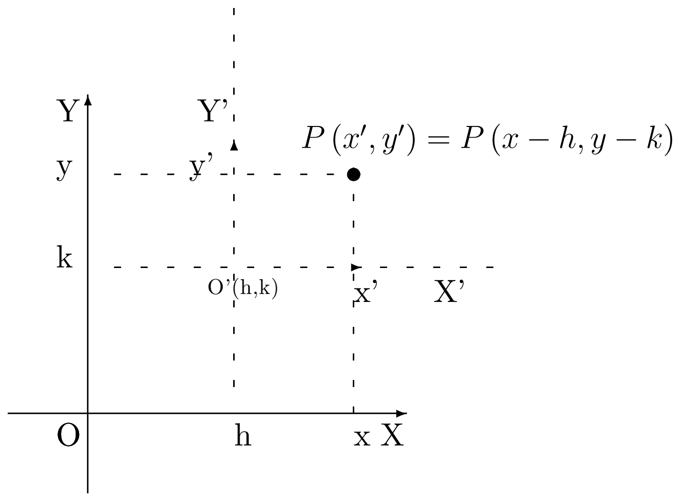


Figura 6a

Como pode ser observado, comparando o sistema auxiliar com o sitema usual pode-se afirmar que:

Se os eixos coordenados $O(0,0)$ são transladados para uma nova origem $O'(h,k)$, então um ponto qualquer $P(x,y)$ antes e depois da translação, terá (x', y') após a translação e as equações de que relacionam as coordenadas antigas com novas coordenadas são dadas por

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases} \tag{10}$$

Exemplo 19 *Consideremos uma circunferência de raio r e centro $C(h,k)$ cuja equação na forma padrão no sistema de centro $O(0,0)$ é dada por*

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

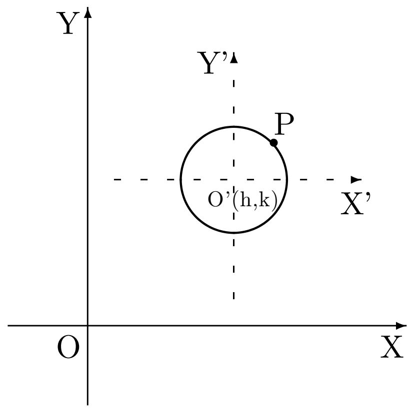


Figura 6b

Se a equação desta circunferência for mudada, por uma translação de coordenadas cuja origem será $O'(h,k)$, então assumirá a forma canônica mais simples dada por

$$x'^{\,2} + y'^{\,2} = r^2. \tag{11}$$

Exemplo 20 *Transformar a equação*

$$x^3 - 3x^2 - y^2 + 3x + 4y - 5 = 0 \tag{12}$$

por meio de uma translação dos eixos coordenados à nova origem $(1,2)$*. Desenhar o lugar geométrico e mostrar ambos os conjuntos de eixos.*

Solução: da equação 10 obtemos

$$x = x' + 1 \qquad \text{e} \qquad y = y' + 2$$

Substituindo x e y na equação 12 obteremos

$$(x'+1)^3 - 3(x'+1)^2 - (y'+2)^2 + 3(x'+1) + 4(y'+2) - 5 = 0.$$

Desenvolvendo e simplificando esta última equação obtemos a equação transformada procurada

$$x'^3 - y'^2 = 0. \tag{13}$$

O lugar geométrico, uma parábola semi-cúbica, está representado na Fig. 6c.

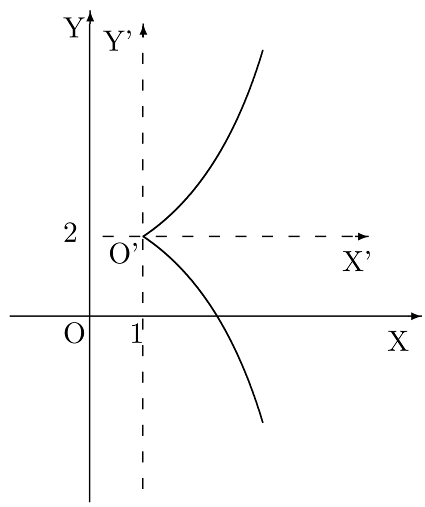


Figura 6c

Exemplo 21 *Por meio de uma translação dos eixos coordenados transformar a equação* $x^2 - 4y^2 + 6x + 8y + 1 = 0$ *em outra equação desprovida de termos do primeiro grau. Desenhar o lugar geométrico e mostrar ambos os conjuntos de eixos.*

Solução: neste caso particular podemos usar dois métodos diferentes, o primeiro sendo o mais geral.

Primeiro método. Substituindo na equação $x^2 - 4y^2 + 6x + 8y + 1 = 0$ os valores de x e y por $x' + h$ e $y' + k$, respectivamente, obtemos a equação transformada

$$(x' + h)^2 - 4(y' + k)^2 + 6(x' + h) + 8(y' + k) + 1 = 0$$

que, após expansão e redução de termos semelhantes assume a forma

$$x'^2 - 4y'^2 + (2h + 6)x' - (8k - 8)y' + h^2 - 4k^2 + 6h + 8k + 1 = 0. \tag{14}$$

Uma vez que a equação transformada deve ser desprovida de termos do primeiro grau, fazemos iguais a zero os coeficientes de x' e y' na equação 14. Assim temos:

$$2h + 6 = 0 \qquad \text{e} \qquad 8k - 8 = 0$$

donde

$$h = -3 \qquad \text{e} \qquad k = 1.$$

Logo, a nova origem é o ponto $(-3, 1)$. Se substituirmos estes valores de h e k em (13) obtemos a equação procurada

$$x'^2 - 4y'^2 - 4 = 0. \tag{15}$$

O lugar geométrico, uma hipérbole, está representado na Fig. 6d.

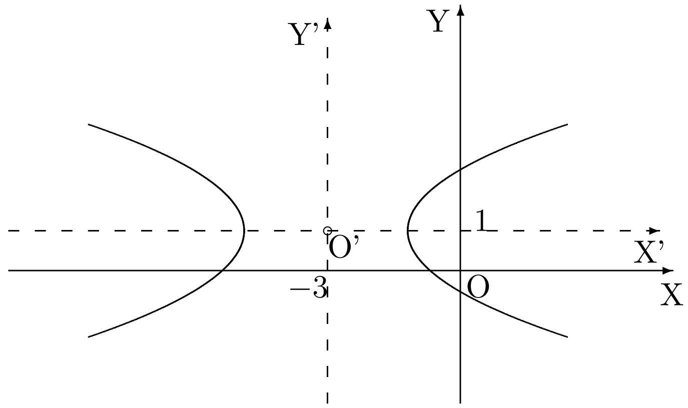


Figura 6d

Segundo método. No caso de equações do segundo grau desprovidas do termo em xy é possível efetuar a transformação pelo método de completar os quadrados. Assim, os termos da equação $x^2 - 4y^2 + 6x + 8y + 1 = 0$ podem ser reagrupados na forma

$$(x^2 + 6x) - 4(y^2 - 2y) = -1.$$

Então completando os quadrados, obtemos

$$(x^2 + 6x + 9) - 4(y^2 - 2y + 1) = -1 + 9 - 4$$

donde

$$(x + 3)^2 - 4(y - 1)^2 = 4 \tag{16}$$

Se na equação 15 fizermos as substituições

$$x + 3 = x' \qquad y - 1 = y'$$

obteremos de imediato a equação procurada $x'^2 - 4y'^2 = 4$. Obviamente, de 16, temos as equações de transformação

$$x = x' - 3 \qquad e \qquad y = y' + 1.$$

Nesse caso, o tipo de simplificação desejada é especificado; em caso contrário, procuramos efetuar o maior número de simplificações possíveis. Tal está ilustrado no exemplo seguinte.

Exemplo 22 *Por uma translação dos eixos coordenados, simplificar a equação*

$$y^2 - 4x - 6y + 17 = 0. \tag{17}$$

Solução: **primeiro método:** substituímos na equação 17 os valores de x e y dados pelas equações de transformação 10. Temos então

$$(y' + k)^2 - 4(x' + h) - 6(y' + k) + 17 = 0$$

que pode ser escrita na forma

$$y'^2 - 4x' + (2k - 6)y' + k^2 - 4h - 6k + 17 = 0. \tag{18}$$

Nossa próxima etapa é determinar os valores de h e k que simplificarão a equação 18. Podemos eliminar o termo em y', mas não podemos eliminar o termo em x' uma vez que seu coeficiente é -4. Neste caso, porém, podemos eliminar o termo constante. Em conseqüência escrevemos

$$2k - 6 = 0 \qquad \text{e} \qquad k^2 - 4h - 6k + 17 = 0$$

donde

$$k = 3 \qquad \text{e} \qquad h = 2.$$

Para estes valores de h e k a equação 18 se reduz à forma procurada

$$y'^2 - 4x' = 0.$$

2.2 Exercícios

1. Em cada um dos exercícios, transformar a equação dada por translação dos eixos coordenados para a nova origem indicada.

(a) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$; $(-1, 3)$.

(b) $3x^2 + 2y^2 + 12x - 4y + 8 = 0$; $(-2, 1)$.

(c) $4x^2 - y^2 - 8x - 10y - 25 = 0$; $(1, -5)$.

(d) $y^3 - x^2 + 3y^2 - 4x + 3y - 3 = 0$; $(-2, -1)$.

(e) $xy - 3x + 4y - 13 = 0$; $(-4, 3)$.

2. Em cada um dos exercícios, por uma translação dos eixos coordenados, transformar a equação dada em outra desprovida de termos do primeiro grau. Usar o primeiro método de exemplo 2 ilustrativo.

(a) $2x^2 + y^2 + 16x - 4y + 32 = 0$.

(b) $3x^2 + 2y^2 + 18x - 8y + 29 = 0$.

(c) $3x^2 - 2y^2 - 42x - 4y + 133 = 0$.

(d) $xy - x + 2y - 10 = 0$.

(e) $8x^3 + 24x^2 - 4y^2 + 24x - 12y - 1 = 0$.

3. Em cada um dos exercícios, por uma translação dos eixos coordenados, transformar a equação dada em outra desprovida de termos do primeiro grau. Usar o segundo método do exemplo 2 ilustrativo.

(a) $4x^2 + 4y^2 + 32x - 4y + 45 = 0$.

(b) $2x^2 + 5y^2 - 28x + 20y + 108 = 0$.

(c) $x^2 - 3y^2 + 6x + 6y + 3 = 0$.

(d) $12x^2 + 18y^2 - 12x + 12y - 1 = 0$.

(e) $12x^2 - 18y^2 - 12x - 12y - 5 = 0$.

4. Em cada um dos exercícios, simplificar a equação dada por uma translação dos eixos coordenados.

(a) $x^2 + 8x - 3y + 10 = 0$.

(b) $16x^2 + 16y^2 + 8x - 48y + 5 = 0$.

(c) $72x^2 + 36y^2 - 48x + 36y - 55 = 0$.

(d) $y^2 - 6x^2 - 24x - 2y - 32 = 0.$

(e) $30xy + 24x - 25y - 80.$

2.2.1 Respostas

(1a) $x'^2 + y'^2 = 4.$

(1b) $3x'^2 + 2y'^2 = 6.$

(1c) $4x'^2 - y'^2 = 4.$

(1d) $y'^3 - x'^2 = 0.$

(1e) $x'y' = 1.$

(2a) $2x'^2 + y'^2 = 4.$

(2b) $3x'^2 + 2y'^2 = 6.$

(2c) $3x'^2 - 2y'^2 = 12.$

(2d) $x'y' = 8.$

(2e) $2x'^3 - y'^2 = 0.$

(3a) $x'^2 + y'^2 = 5.$

(3b) $2x'^2 + 5y'^2 = 10.$

(3c) $x'^2 - 3y'^2 = 3.$

(3d) $2x'^2 + 3y'^2 = 1.$

(3e) $2x'^2 - 3y'^2 = 1$

(4a) $x'^2 - 3y' = 0.$

(4b) $x'^2 + y'^2 = 2.$

(4c) $2x'^2 + y'^2 = 2.$

(4d) $y'^2 - 6x'^2 = 9.$

(4e) $x'y' = 2.$

3 Rotação dos eixos coordenados

Considere a curva de equação $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x - 10y + 9 = 0$ cujo esboço é representado na figura 7. Como a equação apresenta o termo xy não é possível reduzi-la à equação padrão no sistema cartesiano convencional. Além disso, não basta efetuar uma translação de coordenadas. Para que se tenha um sistema de eixos ortogonal passando pelo centro da curva é necessário uma translação de eixos seguida de uma rotação dos eixos transladados como apresentado na figura 7.

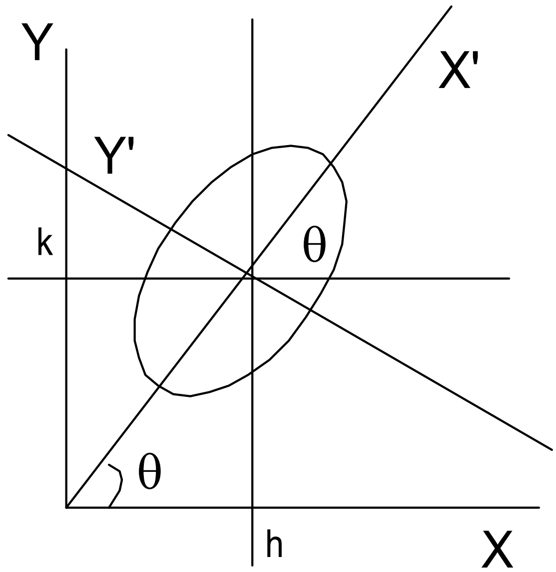


Figura 7:

Na sequência descreveremos o processo para rotacionar eixos. Considere a figura 8

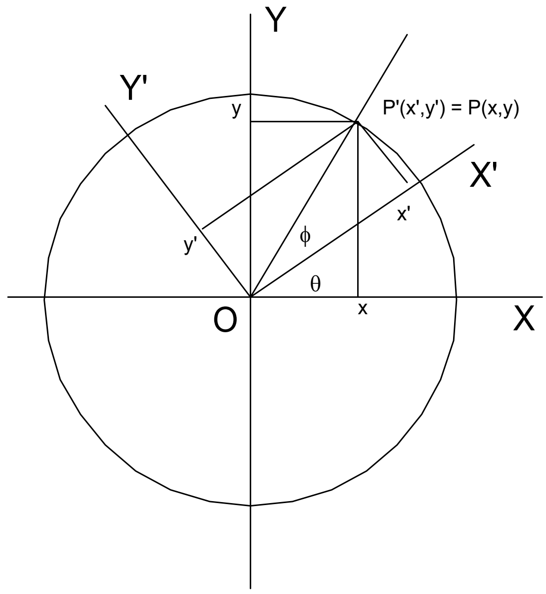


Figura 8:

Os eixos X e Y sofreram uma rotação θ dando origem aos eixos X' e Y', também ortogonais. Nosso trabalho é encontrar as relações entre as coordenadas (x, y) e (x', y'), obtido após a rotação dos eixos. Considere o triângulo retângulo $Ox'P$. As relações trignométricas são:

$$\begin{cases} x' = r\cos\phi \\ y' = rsen\phi \end{cases} \tag{19}$$

Considere o triângulo retângulo OxP e seja $\alpha = (\theta + \phi)$. Então as relações trigonométricas são:

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta + \phi) \\ y = rsen(\theta + \phi) \end{cases} \tag{20}$$

Desenvovendo as equações 20 vem

$x = r(\cos\theta\cos\phi - \ sen\theta sen\phi)$ e $y = r(sen\theta\cos\phi + \ sen\phi\cos\theta)$

ou ou

$x = (r\cos\phi)\cos\theta - (rsen\phi)sen\theta)$ $y = (r\cos\phi)sen\theta + \ (rsen\phi)\cos\theta)$

Substituindo pelos valores de 19 vem

$x = x'\cos\theta - y'sen\theta)$ $y = x'sen\theta + \ y'\cos\theta)$

Portanto, após a rotação dos eixos têm-se:

$$\begin{cases} x = x' \cos\theta - y' sen\theta) \\ y = x' sen\theta + \ y' \cos\theta) \end{cases} \tag{21}$$

Observação 23 *Para obter o resultado desejado será necessário girar os eixos coordenados apenas de um ângulo com valor suficiente para estabelecer um novo sistema ortogonal passando pelo centro da curva em estudo. Geralmente, os valores de ângulo de rotação θ pertencem ao intervalo dado por $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$.*

Exemplo 24 *Transformar a equação*

$$2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 = 4 \tag{22}$$

por meio da rotação dos eixos coordenados em um ângulo de 30°. Desenhar o lugar geométrico e mostrar ambos os conjuntos de eixos.

Solução: usando 21 obtém-se as equações da transformação

$$x = x' \cos 30^\circ - y' \sin 30^\circ = \tfrac{\sqrt{3}}{2}x' - \tfrac{1}{2}y'$$
$$y = x' \sin 30^\circ + y' \cos 30^\circ = \tfrac{1}{2}x' + \tfrac{\sqrt{3}}{2}y'.$$

Se estes valores de x e y são substituídos na equação 22 obtemos

$$2\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x' - \tfrac{1}{2}y'\right)^2 + \sqrt{3}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x' - \tfrac{1}{2}y'\right)\left(\tfrac{1}{2}x' + \tfrac{\sqrt{3}}{2}y'\right) \\ +\left(\tfrac{1}{2}x' + \tfrac{\sqrt{3}}{2}y'\right)^2 = 4.$$

Desenvolvendo e simplificando esta última equação obtemos a equação transformada pedida

$$5x'^2 + y'^2 = 8. \tag{23}$$

O lugar geométrico dos pontos dessa equação é mostrado na figura 8a

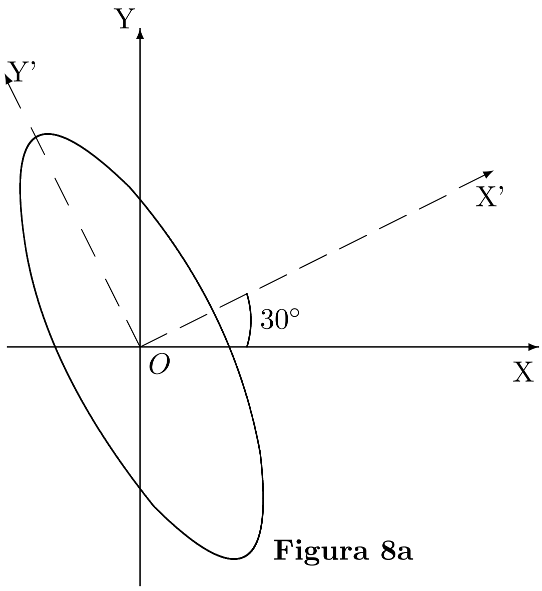


Figura 8a

Exemplo 25 *Por meio de uma rotação dos eixos coordenados transformar a equação*

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 40x - 30y = 0 \tag{24}$$

em outra equação desprovida do termo $x'y'$. Desenhar o lugar geométrico e mostrar ambos os conjuntos de eixos.

Solução: substituindo na equação 24 os valores de x e y dados pelas equações da rotação de eixos 21, obtemos

$$9(x' \cos\theta - y' \sin\theta)^2 - 24(x' \cos\theta - y' \sin\theta)(x' \sin\theta + y' \cos\theta) +$$
$$+16(x' \sin\theta + y' \cos\theta)^2 - 40(x' \cos\theta - y' \sin\theta) - 30(x' \sin\theta + y' \cos\theta) = 0$$

que, após desenvolvimento e redução de termos semelhantes, assume a forma

$$\begin{aligned}
&(9\cos^2\theta - 24\cos\theta\sin\theta + 16\sin^2\theta)x'^2 + \\
&+(14\sin\theta\cos\theta + 24\sin^2\theta - 24\cos^2\theta)x'y' + \\
&+(9\sin^2\theta + 24\sin\theta\cos\theta + 16\cos^2\theta)y'^2 - \\
&-(40\cos\theta + 30\sin\theta)x' + (40\sin\theta - 30\cos\theta)y' = 0.
\end{aligned} \tag{25}$$

Visto que a equação transformada deve ser desprovida de termos em $x'y'$, $x' = 0$ e $y = 0'$ em 25 obteremos

$$14 \sin\theta \cos\theta + 24 \sin^2\theta - 24 \cos^2\theta = 0.$$

ou

$$7(2 \sin\theta \cos\theta) + 24(\sin^2\theta - \cos^2\theta) = 0.$$

Como $\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$ e $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$, podedmos escrever

$$7 \sin 2\theta - 24 \cos 2\theta = 0$$

donde vem

$$\frac{sen 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{24}{7}$$

Substituindo na formula $sen^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1$ obtem-se $\cos 2\theta = \frac{7}{25}$

Como o ângulo θ estará restrito ao primeiro quadrante, 2θ se situará no primeiro ou no segundo quadrantes onde o cosseno e a tangente de um ângulo concordam em sinal.

A fim de efetuar a simplificação da equação 25 encontraremos os valores de $\sin\theta$ e $\cos\theta$, por meio das fórmulas do ângulo metade da Trigonometria. Assim,

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}} = \frac{3}{5} \text{ e } \cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{2}} = \frac{4}{5}.$$

que substituidos na equação 25

$$\left(\frac{144}{25}-\frac{288}{25}+\frac{144}{25}\right)x'^2+\left(\frac{168}{25}+\frac{216}{25}-\frac{384}{25}\right)x'y'$$

$$+\left(\frac{81}{25}+\frac{288}{25}+\frac{256}{25}\right)y'^2-(32+18)x'+(24-24)y'=0$$

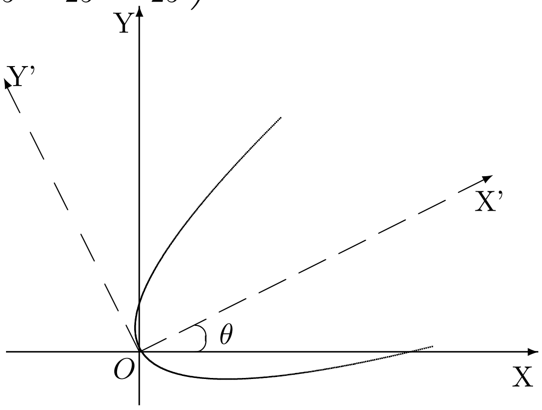


Figura 8b

que se reduz à equação transformada procurada

$$y'^2-2x'=0. \tag{26}$$

O lugar geométrico, uma parábola, está mostrado na Fig. 8b.

3.0.2 Exercícios

1. Determinar as novas coordenadas do ponto $(3,-4)$ quando os eixos coordenados são girados de um ângulo de $30°$.

2. Determinar as novas coordenadas dos pontos $(1,0)$ e $(0,1)$ quando os eixos coordenados são girados de um ângulo de $90°$.

3. Em cada um dos exercícios seguintes transformar a equação dada por rotação dos eixos coordenados do ângulo indicado.

(a) $2x+5y-3=0$; $\arctan 2.5$.

(b) $x^2-2xy+y^2-x=0$; $45°$.

(c) $\sqrt{3}y^2+3xy-1=0$; $60°$.

(d) $5x^2+3xy+y^2-4=0$; $\arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}$.

(e) $11x^2+24xy+4y^2-20=0$; $\arctan 0.75$.

(f) $x^4+y^4+6x^2y^2-32=0$; $45°$.

4. Por meio da rotação dos eixos coordenados transformar a equação $2x-y-2=0$ em outra equação desprovida do termo em x'.

5. Por rotação dos eixos coordenados transformar a equação $x+2y-2=0$ em outra equação desprovida do termo y'.

6. Em cada um dos exercícios seguintes, por uma rotação dos eixos coordenados, transformar a equação dada em outra equação desprovida do termo em $x'y'$.

(a) $4x^2+4xy+y^2+\sqrt{5}x=1$.

(b) $9x^2+3xy+9y^2=5$.

(c) $5x^2+4xy+2y^2=2$.

(d) $2x^2-5xy+2y^2=0$.

(e) $x^2-2xy+y^2-4=0$.

(f) $16x^2+24xy+9y^2+25x=0$.

7. A equação de uma circunferência é $x^2+y^2=r^2$. Mostrar que a forma desta equação permanece sem modificação quando referida aos eixos coordenados que foram girados de qualquer ângulo θ. Diz-se então que esta equação é invariante quanto à rotação.

3.0.3 Respostas

1) $\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}-2, -\frac{3}{2}-2\sqrt{3}\right)$	2)$(0,-1)e(1,0)$
3)$a)\sqrt{29}x'-3=0.$	3$b)4y'^2-\sqrt{2}x'+\sqrt{2}y'=0.$
3$c)3\sqrt{3}x'^2-\sqrt{3}y'^2-2=0.$	3$d)11x'^2+y'^2-8=0.$
3$e)4x'^2-y'^2-4=0.$	3$f)x'^4+y'^4=16.$
4)$\sqrt{5}y'+2=0.$	5)$\sqrt{5}x'-2=0.$
6$a)5x'^2+2x'-y'-1=0.$	6$b)21x'^2+15y'^2-10=0.$
6$c)6x'^2+y'^2-2=0.$	6$d)x'-3y'=0$ e $x'+3y'=0.$
6$e)y'=\sqrt{2}$ e $y'=-\sqrt{2}.$	6$f)5x'^2+4x'-3y'=0.$
7)$5x^2-26xy+5y^2+72=0$	

3.1 Simplificação de equações por meio de transformação de coordenadas.

Já vimos que por meio de uma translação ou de uma rotação dos eixos coordenados, ou ainda combinando as duas é possível transformar quaisquer equações numa das formas padrões com centro na origem do sistema adotado.

Esse processo é denominado simplificação de equações por transformação de coordenadas.

Consideraremos primeiramente o caso em que uma translação dos eixos coordenados a uma nova origem $O'(h,k)$ é seguida por uma rotação dos eixos transladados em torno de O' de um ângulo θ, como se representa na Fig. 8c.

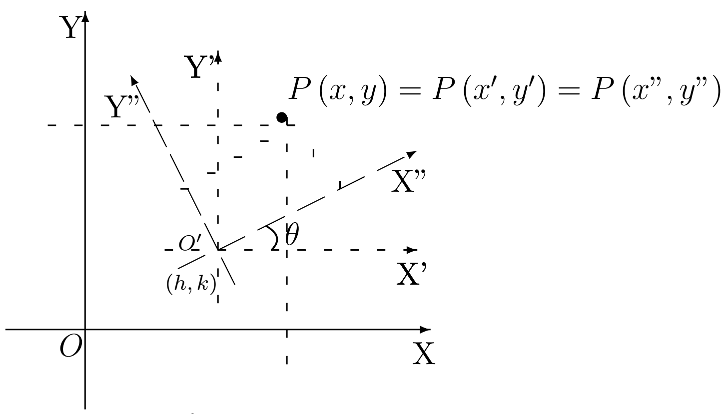


Figura 8c

Seja P um ponto no plano ordenado, sejam (x, y), (x', y') e (x'', y'') suas coordenadas quando referido, respectivamente, aos eixos originais X e Y, aos eixos transladados X' e Y' e aos eixos girados X'' e Y''. Pela equação 10 podemos escrever:

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases} \tag{27}$$

e, 21,

$$\begin{cases} x' = x'' \cos\theta - y'' \sin\theta \\ y' = x'' \sin\theta + y'' \cos\theta. \end{cases} \tag{28}$$

Substituindo os valores de x' e y' dados na equação 28 na equação 27, obtemos as equações da transformação

$$\begin{cases} x = x'' \cos\theta - y'' \sin\theta + h \\ y = x'' \sin\theta + y'' \cos\theta + k. \end{cases} \tag{29}$$

Pode-se mostrar que as equações de transformação 29 permanecem válidas quando a ordem de transformação é invertida, ou seja, quando uma rotação é seguida por uma translação. Desse modo, se os eixos coordenados são submetidos tanto a uma translação como a uma rotação, tomadas em qualquer ordem, e se as coordenadas de qualquer ponto P referido aos conjuntos de eixos original e final são (x, y) e (x'', y''), respectivamente, então as equações de transformação das antigas para as novas coordenadas finais são dadas por

$$\begin{cases} x = x'' \cos\theta - y'' \sin\theta + h \\ y = x'' \sin\theta + y'' \cos\theta + k \end{cases} \tag{30}$$

onde θ é o ângulo de rotação e (h, k) são as coordenadas da nova origem referida aos eixos coordenados originais.

Cabe resaltar que, embora as equações de transformação da equação 30 possam ser empregadas quando são realizadas tanto uma translação como uma rotação, geralmente é mais simples realizar estas operações separadamente em duas etapas distintas. Embora a ordem das transfomações de coordenadas seja indiferente, no caso de uma equação do segundo grau em que os termos x^2, y^2 e xy formam um quadrado perfeito deve-se inicialmente girar os eixos e após fazer a translação.

Exemplo 26 *Por meio de transformação de coordenadas simplificar a equação*
$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x - 10y + 9 = 0$
e esboçar seu gráfico.

Solução: sendo que na equação $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x - 10y + 9 = 0$ os termos de segundo grau não formam um quadrado perfeito, podemos primeiramente transladar os eixos para uma nova origem (h, k). Logo, usando as equações de transformação 10 podemos escrever

$$3(x' + h)^2 - 2(x' + h)(y' + k) + 3(y' + k)^2 - 2(x' + h) - 10(y' + k) + 9 = 0$$

que, após o desenvolvimento, simplificação e redução de termos semelhantes, resulta na equação

$$\begin{gathered} 3x'^2 - 2x'y' + 3y'^2 + (6h - 2k - 2)x' + (-2h + 6k - 10)y' + \\ +(3h^2 - 2hk + 3k^2 - 2h - 10k + 9) = 0. \end{gathered} \tag{31}$$

A fim de eliminar os termos dos coeficientes x' e y', que são os termos de primeiro grau, igualamos seus coeficientes a zero e obtem-se o sistema

$$\begin{cases} 6h - 2k - 2 = 0 \\ -2h + 6k - 10 = 0 \end{cases}$$

cuja solução é $h = 1$ e $k = 2$. Substituindo estes valores de h e k na equação 31 obtemos

$$3x'^2 - 2x'y' + 3y'^2 - 2 = 0. \tag{32}$$

Como ainda existe o termo $x'y'$, vamos eliminá-lo por meio da rotação de eixos. Substituindo x' e y' pelos valores dados nas equações 28 obtém-se

$$\begin{gathered} 3(x'' \cos\theta - y'' \sin\theta)^2 - 2(x'' \cos\theta - y'' \sin\theta)(x'' \sin\theta + y'' \cos\theta) + \\ +3(x'' \sin\theta + y'' \cos\theta)^2 - 2 = 0 \end{gathered}$$

que se reduz a

$$\begin{gathered} (3\cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + 3\sin^2\theta)x''^2 + (2\sin^2\theta - 2\cos^2\theta)x''y'' + \\ +(3\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + 3\cos^2\theta)y''^2 - 2 = 0. \end{gathered} \tag{33}$$

A fim de eliminar o termo $x''y''$ de 33 fazemos seu coeficiente igual a zero, ou seja

$$2\sin^2\theta - 2\cos^2\theta = 0$$

dode vem

$$2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta$$

ou

$$\sin\theta = \cos\theta$$

comcluímos então que $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Substituindo θ por $\frac{\pi}{4}$ na equação 33 obtem-se a equação $x''^2 + 2y''^2 - 1 = 0$, na forma padrão é dada por

$$x''^2 + \frac{y''^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

cujo gráfico é a elipse representada na figura 9.

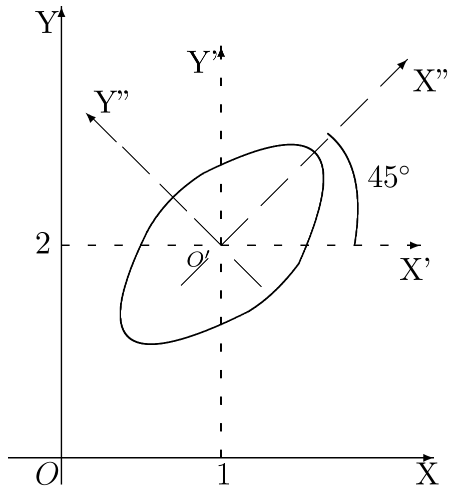


Figura 9

Exercícios

1. Em cada um dos exercícios abaixo, simplificar a equação dada por transformação de coordenadas.

   (a) $x^2 - 10xy + y^2 - 10x + 2y + 13 = 0$.

   (b) $52x^2 - 72xy + 73y^2 - 104x + 72y - 48$.

   (c) $16x^2 + 24xy + 9y^2 + 60x - 80y + 100 = 0$

   (d) $3x + 2y - 5 = 0$.

   (e) $2x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x - 10y + 11 = 0$.

2. Determinar as novas coordenadas do ponto $(-1, 3)$ quando os eixos coordenados são, primeiramente, transladados à nova origem $(4, 5)$ e, então, girados de um ângulo de $60°$.

3. Determinar as novas coordenadas do ponto $(2, 2)$ quando os eixos coordenados são, primeiramente, girados de um ângulo de $45°$ e, então, transladados à nova origem $(-1, 1)$.

4. Por translação dos eixos coordenados à nova origem $(3, 3)$, seguida pela rotação dos eixos de um ângulo de $30°$, as coordenadas de um certo ponto P são transformadas em $(7, 6)$. Determinar as coordenadas de P em relação aos eixos originais.

5. Por translação dos eixos coordenados à nova origem $(1, 1)$, seguida pela rotação dos eixos de um ângulo de $45°$, a equação de um certo lugar geométrico é transformada em $x''^2 - 2y''^2 = 2$. Determinar a equação do lugar geométrico em relação aos eixos originais.

3.1.1 Respostas

1. (a) $2x''^2 - 3y''^2 - 6 = 0$.

   (b) $x''^2 + 4y''^2 - 4 = 0$.

   (c) $x''^2 - 4y'' = 0$.

   (d) $3x''^2 + y''^2 - 3 = 0$.

2. $\left(\frac{-5}{2} - \sqrt{3}, \frac{5}{2}\sqrt{3} - 1\right)$.

3. $(2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

4. $\left(\frac{7}{2}\sqrt{3}, \frac{13}{2} + 3\sqrt{3}\right)$.

5. $x^2 - 6xy + y^2 + 4x + 4y = 0$.

4 Cônicas

4.1 OBJETIVOS DO CAPÍTULO

Ao final deste capítulo o estudante deverá ser capaz de:

1 - Reconhecer equações das cônicas e seus pontos notáveis;

2 - Determinar as equações das cônicas a partir de pontos notáveis;

3 - Resolver problemas envolvendo cônicas;

4 -Representar graficamente as cônicas.

Exercícios para entregar no dia da prova valendo até dois pontos para quem não tirar dez na prova e acertar pelo menos duas questões na prova e um ponto para que acertar apenas uma questão.

1. Transformar as seguintes equações para coordenadas polares

$a)$	$x^2+y^2=4$	$b)$	$x=4$
$c)$	$y=2$	$d)$	$y+x=0$
$e)$	$x^2+y^2-2x=0$	$f)$	$x^2+y^2-6y=0$
$g)$	$x^2+y^2-2x-2y-2=0$	$h)$	$x^2+y^2-4x+4y+8=0$

2. Transformar as seguintes equações para coordenadas cartesianas.

$a)$	$r=\cos\theta$	$b)$	$r=2\sin\theta$
$c)$	$r=\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$	$d)$	$r=a, a>0.$
$e)$	$r=4\sqrt{\cos 2\theta}$	$f)$	$r=2\left(1+\cos\theta\right)$

3. Esboçar o gráfico das curvas em coordenadas polares (é aconselhavel usar o Excel)
.

$a)$	$r=1+2\cos\theta$	$b)$	$r=1-2\sin\theta$
$c)$	$r=2+3\cos\theta$	$d)$	$r=3-2\sin\theta$
$e)$	$r=2\cos 3\theta$	$f)$	$r=2\sin 2\theta$
$g)$	$r=2-\cos\theta$	$h)$	$r=2-\sin\theta$
$i)$	$r^2=4sen2\theta$	$j)$	$\theta=\pi/4$
$l)$	$r=3\theta,\theta\geq 0$		

4. Simplificar a equação $y^2-6x^2-24x-2y-32=0$ por uma translação dos eixos coordenados.

5. Determine a equação da circunferência cujo centro é o ponto $(-4,-1)$ e que é tangente à reta $3x+2y-12=0$.

6. Determinar a equação da circunferência cujo centro está sobre a reta $4x+7y+5=0$ e que passa pelos dois pontos $(-1,-4)$ e $(2,-1)$.

7. Escreva as equações reduzidas das parábolas com vértice na origem, dados
   (a) o foco $(8,0)$;
   (b) dois pontos da parábola $(6,18)$ e $(-6,18)$;
   (c) um ponto da diretriz $(4,7)$ e o eixo de simetria Ox.

8. Ache o vértice, o foco, uma equação do eixo e uma equação da diretriz da parábola dada. Faça um esboço do gráfico.
   (a) $y^2+6x+10y+19=0$
   (b) $y=3x^2-3x-3$
   (c) $2y^2=4y-3x$

9. Escreva a equação reduzida da elipse, dados
   (a) os focos $(\pm 5,0)$ e dois vértices $(\pm 13,0)$;
   (b) dois vértices $(\pm 5,0)$ e a excentricidade $e=\frac{3}{5}$. Os focos estão no eixo Ox;
   (c) o centro $(0,0)$, um dos focos $(0,-\sqrt{40})$ e um ponto $(\sqrt{5},\frac{14}{3})$.

10. Ache o centro, os vértices, focos e excentricidade da elipse dada. Faça um esboço da curva mostrando os focos.
    (a) $3x^2+5y^2-6x-12=0$
    (b) $3x^2+2y^2+12x-4y+2=0$

11. Ache o centro, os vértices, os focos e as equações das assíntotas da hipérbole dada. Faça um esboço da curva e de suas assíntotas e mostre os focos.
    (a) $9x^2-4y^2=36$
    (b) $x^2-y^2+8x-2y-21=0$
    (c) $y^2-x^2+2y-2x-1=0$

12. Escreva a equação reduzida da hipérbole, dados
    (a) os vértices $(\pm 2,0)$ e os focos $(\pm 3,0)$;
    (b) $b=4$, as assíntotas $2y=\pm 3x$ (focos no eixo Oy);
    (c) as assíntotas $y=\pm x$ e um ponto da hipérbole $(5,9)$.

13. Estabelecer a equação da parábola sabemdo que a $V(2,3)$ e $d = -3$. Esboçar o gráfico.

14. Determiar a equação da elipse tal que $C(1,4)$, um foco é $F(7,4)$ e a excentricidade é $e = \frac{3}{5}$.

15. Dada a hipérbole $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$ determine o centro, os vértices, os focos a excentricidade e esboce o gráfico.

16. Estabelecer a equação da hipérbole sabendo que tem vértices $(3, -2)$ e $(5, -2)$, e um foco $(7, -2)$. Esboçar o gráfico.