0.1 Tipos importantes de funções

Função par: Se $f(x) = f(x)$, para todo $x \in Dom(f)$ então dizemos que a função f é uma função par. (note que o gráfico é uma curva simétrica pelo eixo y).

Exemplos: $f(x) = x^2$ é uma função par pois $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$
$g(x) = \cos(x)$ é uma função par, já que $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$

Função ímpar: Se $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in Dom(f)$ então dizemos que a função f é uma
função ímpar. (note que o gráfico é uma curva simétrica pela origem).

Exemplos: $f(x) = x^3$ é uma função impar pois $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

Função injetora: Se para quaisquer x_1 e x_2 no domínio de f, $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, então
dizemos que f é uma função injetora.

Exemplos: $f(x) = x^3$ é uma função injetora já que $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1^3 \neq x_2^3 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
$f(x) = x^2$ não é injetora pois tomando $x_1 = 3$ e $x_2 = -3$ temos $x_1 \neq x_2$ mas $f(x_1) = 9$ e $f(x_2) = 9 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Geometricamente, para uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se qualquer reta paralela ao eixo dos x cortar o gráfico de f´em apenas um ponto a função f é uma função injetora.

Função sobrejetora: é aquela em que sua imagem coincide com seu contra-domínio.

Função bijetora: é aquela que é ao mesmo tempo bijetora e sobrejetora.

Função composta: Sejam $g : A \to B$ e $f : \operatorname{Im}(g) \to C$. A função $f \circ g : A \to C$ dada por
$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ é a função composta da função f com a função g.

Exemplos: $g(x) = x-3$ e $f(x) = |x|$ então $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-3) = |x-3|$
$h(x) = e^x$ e $v(x) = \sin x$ então $(v \circ h)(x) = v(h(x)) = v(e^x) = \sin(e^x)$

Observação: Note que em geral $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.No exemplo acima $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(|x|) = |x| - 3$
$\Rightarrow (g \circ f)(x) = |x| - 3 \neq |x-3| = (f \circ g)(x)$

Função convexa: Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é dita convexa se para quaisquer x e y pertencentes a [a,b] e para todo t em [0,1], tem-se

$$f(tx + (1-t)y) \leq f(x) + (1-t)f(y).$$

Uma função diz-se estritamente convexa se :

$$f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y), \text{ para todo } t \in (0,1) \text{ e } x \neq y.$$

Propriedades

* Uma função convexa não possui pontos de máximo.

* Se uma função convexa possui um ponto de mínimo local, ele também será um ponto de mínimo global.

* Uma função estritamente convexa possui no máximo um ponto de mínimo.

* O máximo de funções convexas também é uma função convexa.

Função côncava

Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é dita côncava se para quaisquer x e y pertencentes a [a,b] e para todo t em [0,1], tem-se

$$f(tx + (1 - t)y) \geq f(x) + (1 - t)f(y).$$

Uma função diz-se estritamente ccôncava se :

$$f(tx + (1 - t)y) > tf(x) + (1 - t)f(y), \text{ para todo } t \in (0, 1) \text{ e } x \neq y.$$

* se f(x) é uma função côncava, então todo máximo local é máximo global

* se f (x) é convexa então -f(x) é côncava

* funções lineares são convexas e côncavas

* se f (x) é côncava, g (x)= 1/ f (x)é convexa ■x | f (x)> 0

* se f (x) é convexa, g (x)= 1/ f (x)é côncava ■x | f (x)< 0

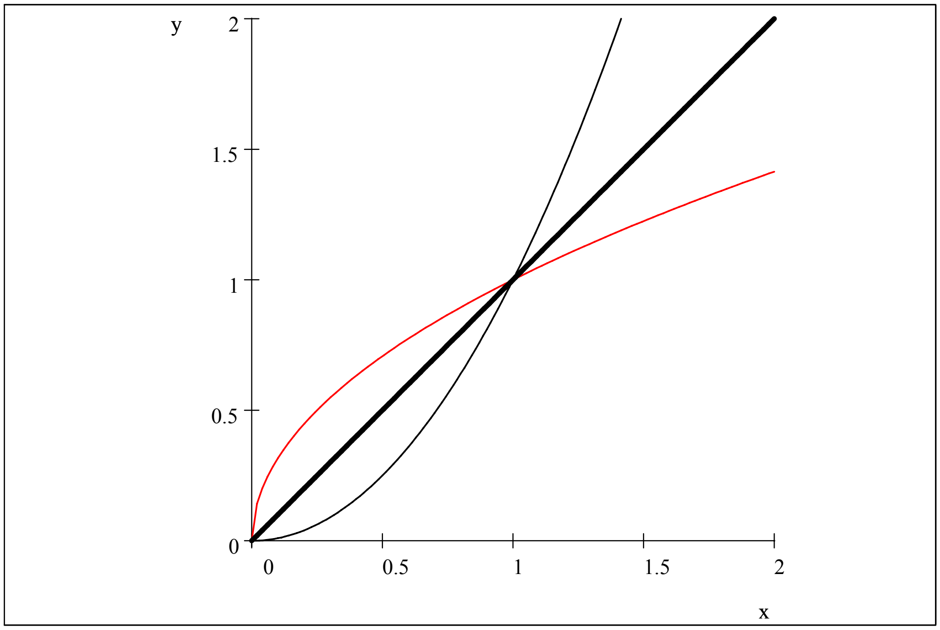
Função inversa: Seja $y = f(x)$ uma função onde $f : A \to B$. Se, para cada $y \in B$, existir exatamente um valor de $x \in A$ tal que $y = f(x)$, então podemos definir uma função $g : B \to A$ tal que $x = g(y)$. A função g definida desta maneira é chamada função inversa de f e denotada por f^{-1}.

Observação :a) Pela definição podemos concluir que para existir a função inversa a função f deve ser bijetora.

b) Se a função f possui uma inversa f^{-1} então $\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y$ e $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$

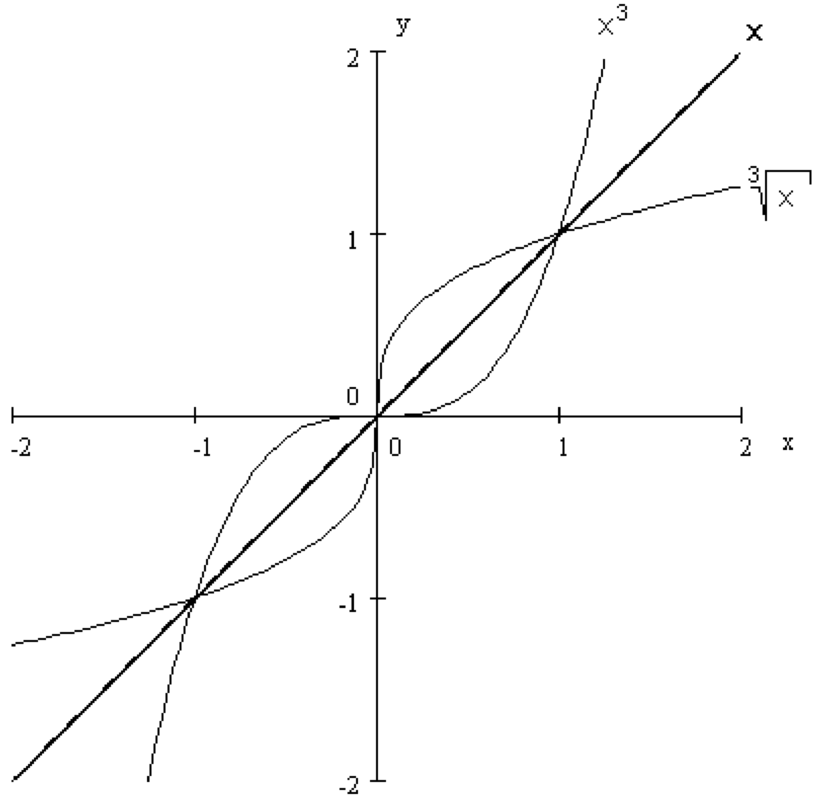
c) Os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação a reta $y = x$

Exemplos: A função $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, definida por $f(x) = x^2$ tem como inversa a função $f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ dada por $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ (observe a simetria em relação a reta $y = x$)



A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3$ tem como inversa a função $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ (observe a simetria em relação a eta $y = x$)

:

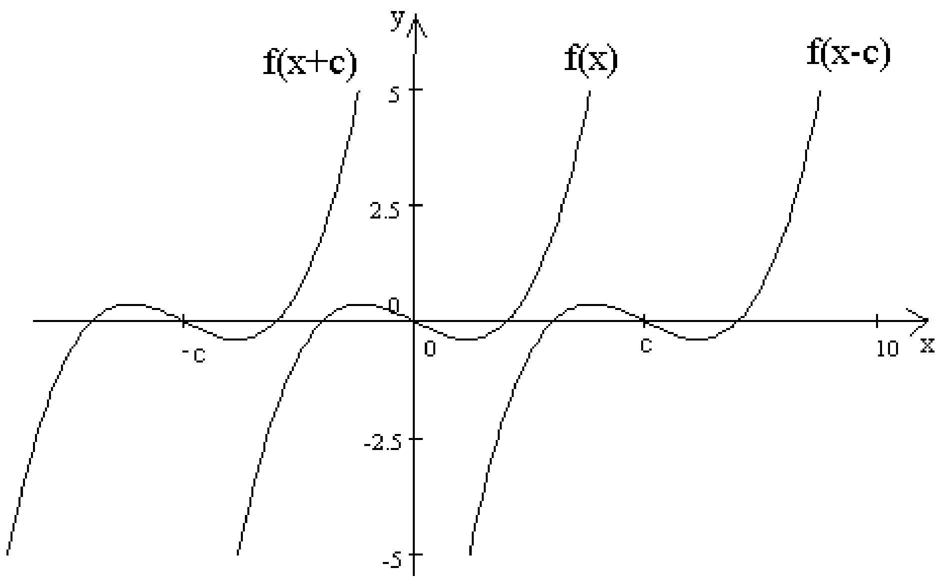


1 Construção de Gráficos

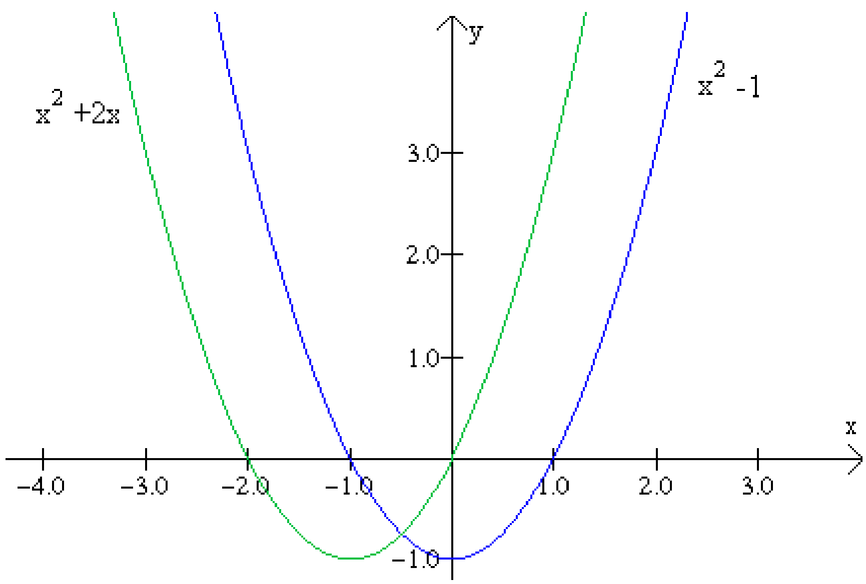
Se c é um número real positivo então:

O gráfico de $f(x+c)$ é o gráfico de $f(x)$ deslocado c unidades para a esquerda.

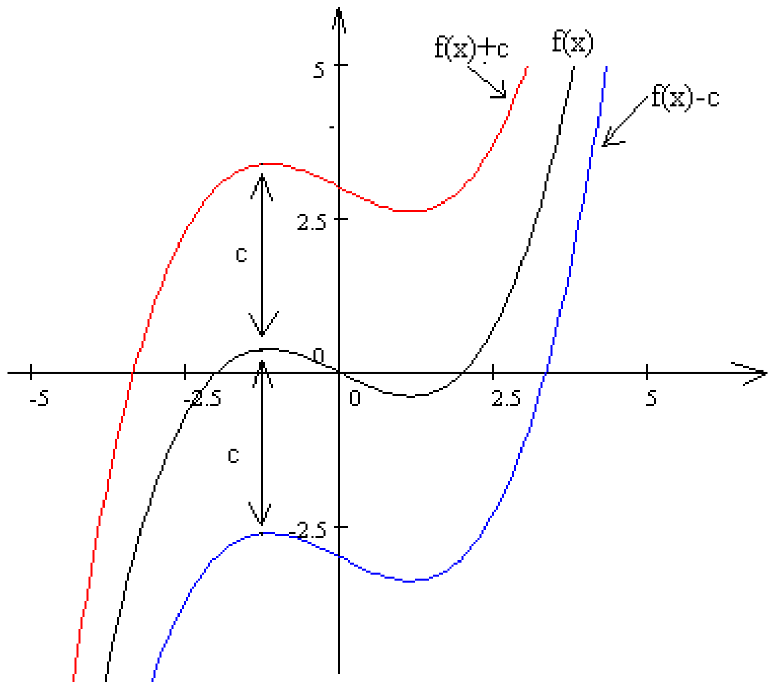
O gráfico de $f(x-c)$ é o gráfico de $f(x)$ deslocado c unidades para a direita.·



Exemplo: $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = f(x+1) = (x+1)^2 - 1 = 2x + x^2$



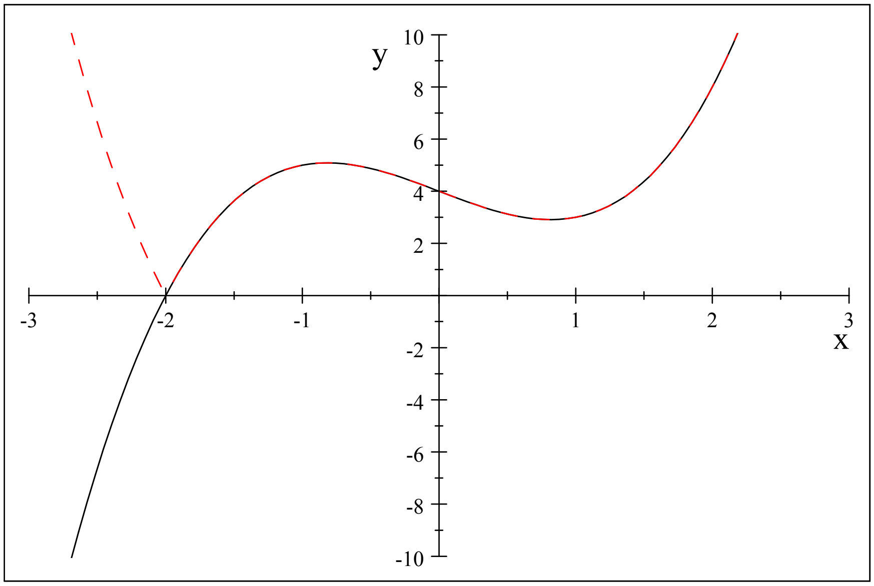
O gráfico de $f(x) + c$ é o gráfico de $f(x)$ deslocado c unidades para cima.
O gráfico de $f(x) - c$ é o gráfico de $f(x)$ deslocado c unidades para baixo.



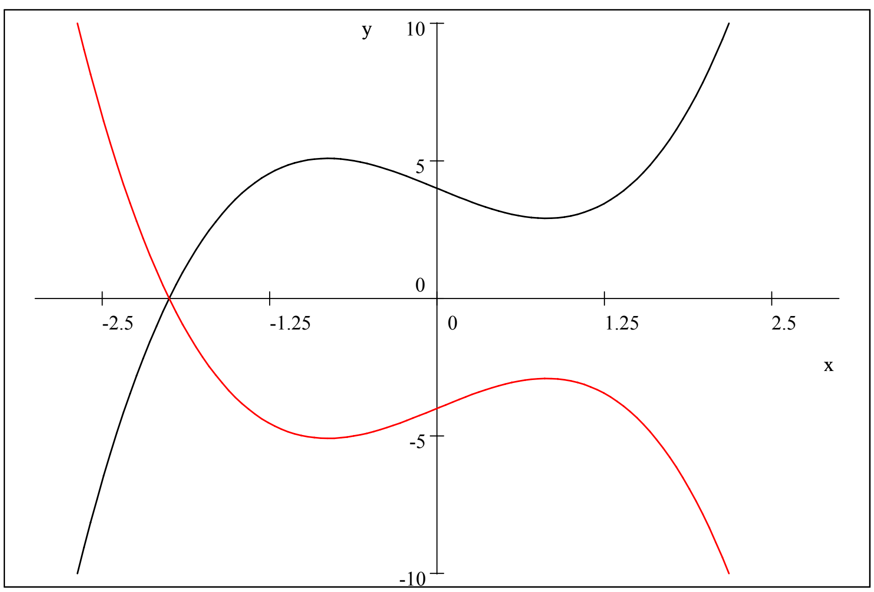
O gráfico de $|f(x)|$ é igual ao gráfico de $f(x)$ se x é positivo e é o gráfico de $f(x)$ refletido através do eixo Ox se x é negativo

Exemplo: Gráfico de $f(x) = x^3 - 2x + 4$ (linha contínua)

Gráfico de $h(x) = |f(x)| = \left|x^3 - 2x + 4\right|$ (linha tracejada)



O gráfico de $-f(x)$ é o gráfico de $f(x)$ refletido através do eixo Ox
Exemplo: Gráfico de $f(x) = x^3 - 2x + 4$ (linha contínua)
Gráfico de $g(x) = -f(x) = -x^3 + 2x - 4$ (linha Tracejada)

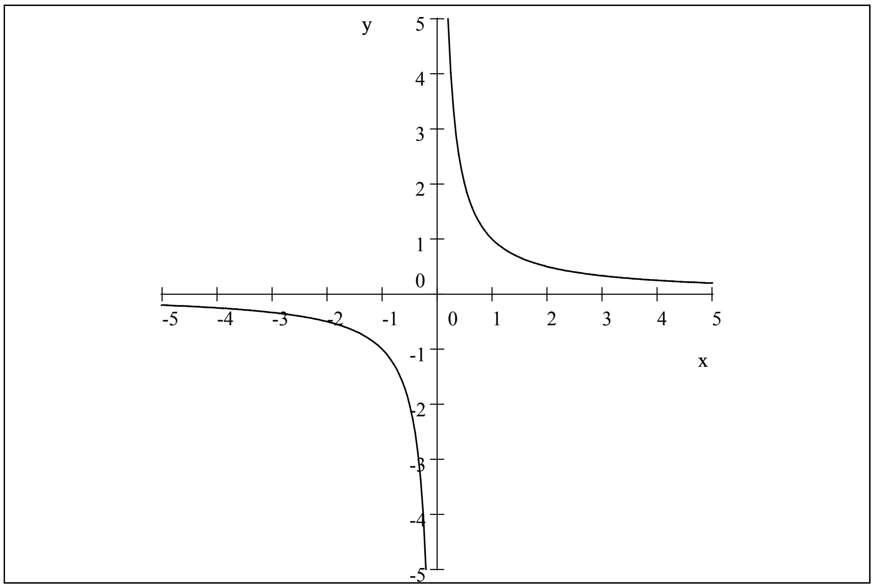


2 Função Recíproca

Definimos função recíproca de x à função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$

$Dom(f) = \mathbb{R}^*$, $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^*$

Gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$



3 Função máximo inteiro

Dado um número real x, sempre é possível dizer que ou ele será um número inteiro n, ou estará entre um inteiro n e o seu sucessor n+1. Por exemplo, o número real 2,7 está entre os inteiros 2 e 3; o número real -2 está entre os inteiros -2 e -1, o número real está entre 3 e 4 e o número real 5 é o próprio número inteiro 5.

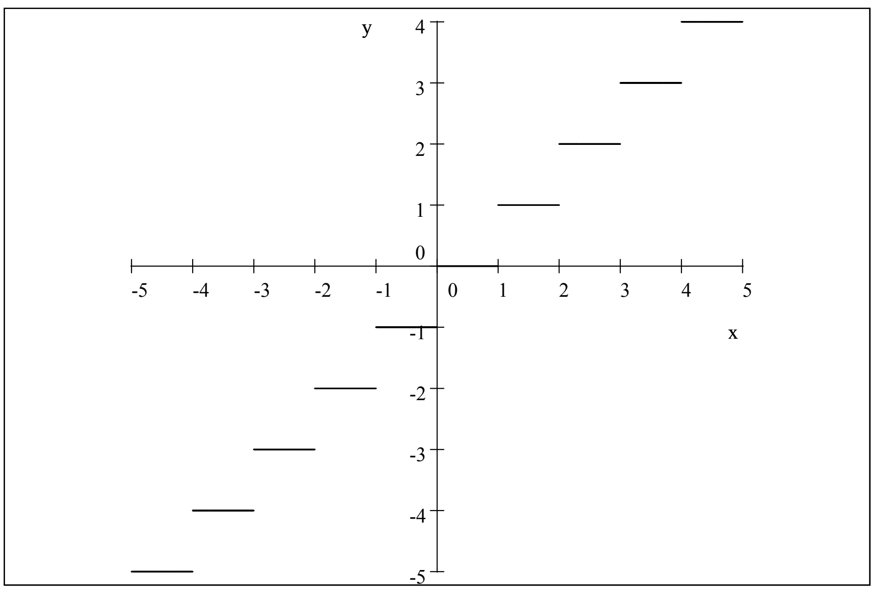
Usando a linguagem matemática, acabamos de dizer que, para todo número real x, existe um único inteiro n tal que n menor ou igual que x menor que n+1 . Esse número inteiro n é chamado de "parte inteira de x", cuja notação é [x]. Em relação aos exemplos, segue que: [2,7]= 2, [- 2] = -2; [3,5] = 3 e [5] = 5. Vamos ver agora uma aplicação da função parte inteira.

Se eu corro x quilômetros em t minutos, como posso saber o tempo médio por quilômetro? Se corri 5 km em 30 minutos, faço a divisão de 30 por 5 e concluo que o tempo médio é de 6 minutos/ km, mas, se tivesse corrido os mesmos 5 km em 31 minutos, qual seria o significado de 31/5 que me conduziria ao número 6,2? A parte inteira indica 6 minutos e a parte decimal 1/5 de minuto ou, de outra forma, 20% de 60 segundos. Usando o conceito e o símbolo da função parte inteira, concluímos que o tempo médio por quilômetro corrido será dado por: [x/t] minutos e {(x/ t)-[x/ t]}.60 segundos.

A função parte inteira, que à primeira vista pode parecer uma simples brincadeira matemática, constitui importante ferramenta para a programação de computadores. Convido agora você a construir o gráfico da função parte inteira no plano cartesiano.

Definimos função parte inteira de x à função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = [x]$ onde $[x]$ é o maior inteiro menor que x

Gráfico de $f(x) = [x]$



4 Função n-ésima potência de x

Definimos função x na n-ésima potência de x à função $f : Domf(f) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n$.

Se n é um número par então $Dom(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$

Se n é um número impar então $Dom(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

5 Função Racional Particular

Definimos função racional de x à função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{x^n}$$

Toda função do tipo $y = \frac{1}{x^n}$, com x diferente de zero, é um caso particular de Função Racional. São exemplos dessas funções:

.

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x^2} \\ y &= \frac{1}{x^3} \\ y &= \frac{1}{x^4} \end{aligned}$$

.

e assim por diante.

$Dom(f) = \mathbb{R}^*$

$\text{Im}(f) = \mathbb{R}^*_+ = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x > 0\}$ se n é par

$\text{Im}(f) = \mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x \neq 0\}$ se n é impar

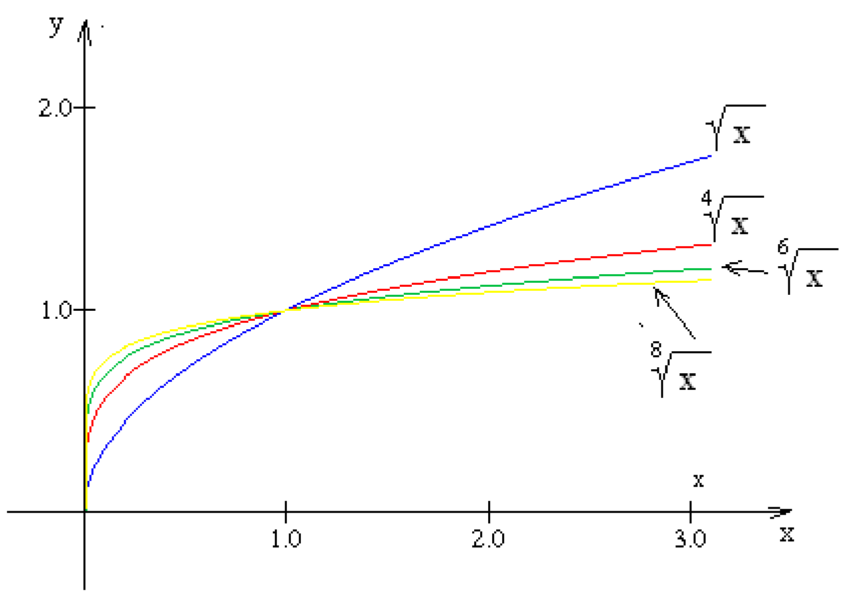
6 Função Raiz n-ésima de x

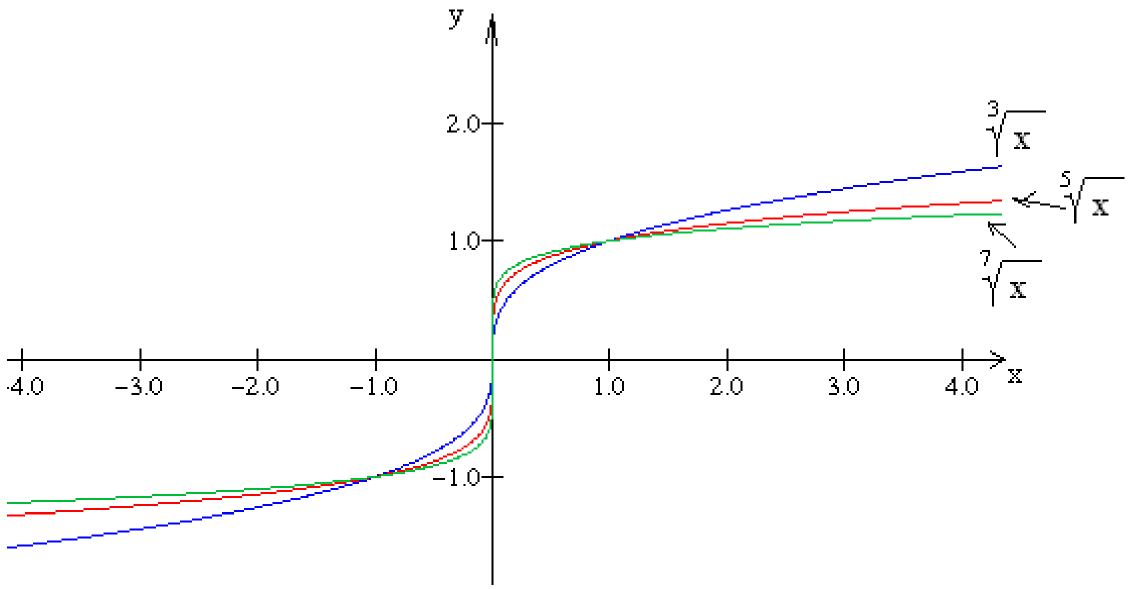
Definimos função raiz n-ésima de x a função $f : Domf(f) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

Se n é um número par então $Dom(f) = [0, +\infty)$ e $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$

Se n é um número impar então $Dom(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

Exemplos





6.1 Exercicios Resolvidos Função Raiz n-ésima de x

1) Se $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$, calcule

a) $x + x^{-1}$

b) $x^2 + x^{-2}$

2) Resolva as seguintes equações:

a) $\sqrt[3]{x+4} = 2$

b) $\sqrt{x+2} = x$

c) $\sqrt[4]{x^2+4x+3} = \sqrt[4]{x+1}$

d) $\sqrt{x} + 1 = \sqrt{2x+1}$

3) Calcule

$$\sqrt[n]{\frac{20}{4^{n+2} + 2^{2n+2}}}$$

4) Determine o domínio da função $f(x) = \sqrt[5]{x^2+2}$

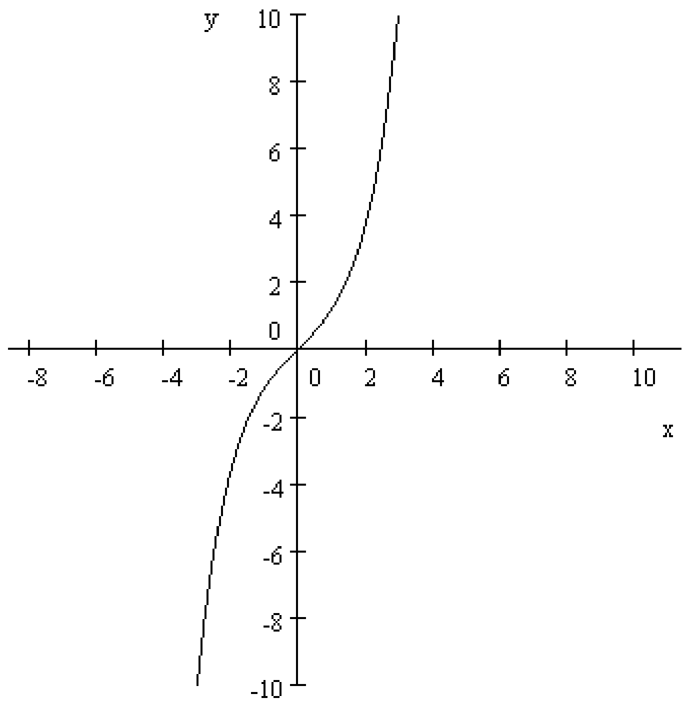
5) Faça o gráfico da função $g(x) = x^{\frac{3}{2}}$

7 Função Hiperbólica

Seno Hiperbólico: Definimos a função seno hiperbólico, denotada por sinh, à função $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

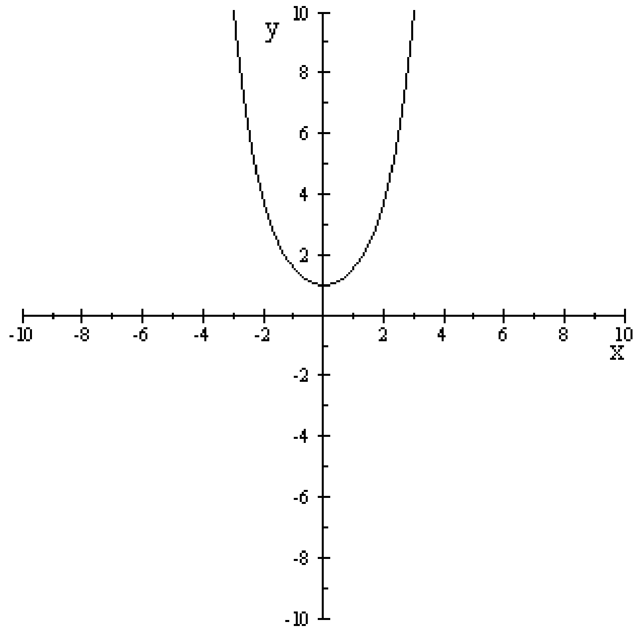
Observe que:
a) O domínio da função seno hiperbólico é $\mathbb{R}$
b) A função função seno hiperbólico assume todos os valores reais
c) .A função função seno hiperbólico passa na origem do sistema cartsiano
Gráficos: O gráfico da função seno hiperbólico tem a seguinte forma



Cosseno Hiperbólico: Definimos a função cosseno hiperbólico, denotada por senh, à função $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Observe que:
a) O domínio da função cosseno hiperbólico é $\mathbb{R}$
b) A função função cosseno hiperbólico assume somente valores positivos
c) .A função função cosseno hiperbólico passa no ponto $P(0, 1)$ do sistema cartesiano
Gráficos: O gráfico da função cosseno hiperbólico tem a seguinte forma
$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$



Aplicação: Ao observar um fio usado para transporte de energia elétrica, preso em dois postes, notamos que o peso do mesmo faz com que ele fique meio arredondado, dando a impressão que o gráfico formado pela curva representa uma parábola, mas na verdade, tal curva é o gráfico da função cosseno hiperbólico, conhecida como a catenária (do Latim catena=cadeia) pois foi através de uma corrente metálica formada por elos (cadeias) que se observou primeiramente tal curva.

Outras funções Hiperbólicas

Tangente Hiperbólica:

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

Contangente Hiperbólica:

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

Secante Hiperbólica:

$$\text{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$$

Cossecante Hiperbólica:

$$\text{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)}$$

As funções acima estarão definidas onde os respectivos denominadores não se anularem.

7.1 Exercícios Resolvidos Funções Hiperbólicas

1) Mostre que

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(t) = 1$$