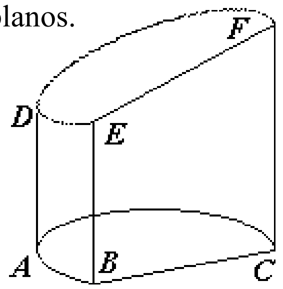
Exame de ALG – 13 de julho de 2007

1) Qual a distância do ponto ***P***(1, 0, 10) ao plano ***DEF*** da questão 2)?

2) A figura ao lado representa parte de um cilindro elíptico cortado por três planos.
Os pontos ***A*** e ***C*** são os vértices da elipse da base.
Apresente as equações das faces e das arestas.



A(-5, 0, 0)	***D***(-5, 0, 4)
B(-3, $8/5$, 0)	***E***(-3, $8/5$, 5)
C(5, 0, 0)	***F***(5, 0, 8)

3) Mostre que a inversa de $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ é $\begin{vmatrix} 1{,}4 & -0{,}2 & -0{,}2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{vmatrix}$ E use-o para resolver $\begin{vmatrix} 3x + 3z - t = 2 \\ 2x - y + 2z = 5 \\ 2y + 10z = t \end{vmatrix}$

4) De ***quantas*** maneiras é possível ***escrever*** o polinômio $\boldsymbol{x^3 + 7x + 5}$ como ***combinação linear*** dos polinômios $\boldsymbol{x^3 - x}$, $\boldsymbol{2x + 2}$ e $\boldsymbol{3x^3 - 3}$?. ***Escreva*** uma delas, se possível.

5) Seja $\boldsymbol{M_3}$, o conjunto das matrizes *3*x*3* e considere, nele, a seguinte transformação:
Somar, na terceira linha, o dobro da primeira linha.
Isto pode ser feito mediante o produto por uma matriz. **Qual** ?

============================== ====================================

Gabarito:

1) $u = 5\ DE = (10, 8, 5)$

$v = DF = (10, 0, 4)$ → $n = u \times v = (32, 10, -80)$

$w = DP = (6, 0, 6)$ → $d = Proj_n\, w = w \,.\, U_n = \dfrac{|192 - 480|}{\sqrt{1024 + 6400}} = \dfrac{18\sqrt{29}}{29} \sim 3{,}34 u.c.$

2) <u>Faces</u>: Não plana → $4x^2 + 25y^2 = 100$ (*)

Planas → inferior: $z = 0$

vertical: $x + 5y = 5$ (**)

inclinada: $16x - 55y - 40z = 240$ (***)

<u>Arestas</u>: Elipse inferior → $\begin{cases} 4x^2 + 25y^2 = 100 \\ z = 0 \end{cases}$ Elipse superior → $\begin{cases} 4x^2 + 25y^2 = 100 \\ 16x - 55y - 40z = 240 \end{cases}$

Reta inferior → $\begin{cases} x + 5y = 5 \\ z = 0 \end{cases}$ Reta superior → $\begin{cases} x + 5y = 5 \\ 16x - 55y - 40z = 240 \end{cases}$

Retas verticais → $AD \begin{cases} x = -5 \\ y = 0 \end{cases}$ $EB \begin{cases} x = -3 \\ y = 8/5 \end{cases}$ $CF \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases}$

(*) Substituindo ***B***, $x = 3$ e $y = \dfrac{5}{8}$ em $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, calculamos $b = 2$.

(**) Substituindo ***B*** e ***C*** em $y = mx + k$, calculamos $m = \dfrac{-1}{5}$ e $k = 1$.

(***) Substituindo ***D, E*** e ***F*** em $ax + by + c = 1$, calculamos $a = \dfrac{-1}{15}$, b = $\dfrac{11}{48}$ e $c = \dfrac{1}{6}$.

3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1{,}4 & -0{,}2 & -0{,}2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ O sistema fica: $\begin{vmatrix} x + z = (2+t)/3 \\ 2x - y + 2z = 5 \\ y + 5z = t/2 \end{vmatrix}$

Matricialmente: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (2+t)/3 \\ 5 \\ t/2 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1{,}4 & -0{,}2 & -0{,}2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} (2+t)/3 \\ 5 \\ t/2 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1{,}1t - 0{,}2)/3 \\ (2t - 11)/3 \\ (-0{,}1t + 2{,}2)/3 \end{vmatrix}$$

4) $\boldsymbol{x^3 + 7x + 5} = a(\boldsymbol{x^3 - x}) + b(\boldsymbol{2x + 2}) + c(\boldsymbol{3x^3 - 3})$

$\boldsymbol{x^3 + 7x + 5} = (\boldsymbol{a + 3c})x^3 + (\boldsymbol{2b - a})x + (\boldsymbol{2b - 3c}) \rightarrow \begin{vmatrix} a + 3c = 1 \\ 2b - a = 7 \\ 2b - 3c = 5 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{matrix} a = -1/2 \\ b = 13/4 \\ c = 1/2 \end{matrix}$

$$\boldsymbol{x^3 + 7x + 5} = \frac{-1}{2}(\boldsymbol{x^3 - x}) + \frac{13}{4}(\boldsymbol{2x + 2}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{3x^3 - 3})$$

5) Se $\boldsymbol{T}$ é a transformação e M_T é a matriz pedida, então, para cada matriz M em $\boldsymbol{M_3}$, temos:

$$T(M) = T(I.M) = M_T\,.\,(I.M) = (M_T.I).M = T(I).M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} .\,M$$