

APOSTILA DE ÁLGEBRA II

Prof. Dr Rogério de Aguiar
Professor do Departamento de Matemática
CCT - UDESC - JOINVILLE

Email: dma2ra@joinville.udesc.br
Home Page: www.joinville.udesc.br/dmat/rogerio

01 de Março de 2006

Sumário

1	SUPERFÍCIES E CURVAS NO ESPAÇO	4
1.1	As Cônicas	4
1.1.1	Circunferência	4
1.1.2	Elipse	7
1.1.3	Parábola	11
1.1.4	Hipérbole	12
1.2	Superfícies	20
1.2.1	Introdução	20
1.2.2	Superfície Cilindrica	20
1.3	Cilindros projetantes de uma curva	26
1.4	Construção geométrica da curva formada pela interseção de seus cilindros projetantes	28
1.5	Primeira lista de exercícios	37
1.6	Equações Paramétricas	37
1.7	Equação Vetorial das curvas	43
1.8	Segunda lista de exercícios	46
1.9	Superfícies de revolução	47
1.9.1	Introdução	47
1.9.2	Equação de uma Superfície de Revolução	47
1.10	Terceira lista de exercícios	51
1.11	Quádricas	51
1.11.1	Introdução	51
1.11.2	Exemplos de quádricas	51
1.11.3	Classificação das quádricas cêntricas	52
1.11.4	Classificação das quádricas não cêntricas	57
1.12	Quarta lista de exercícios	62
1.13	Sistema de Coordenadas	62
1.13.1	Sistema de coordenadas cartesianas	62
1.13.2	Sistema de coordenadas polares	63
1.13.3	Sistema de coordenadas cilíndricas	66
1.13.4	Coordenadas Esféricas	67
1.13.5	Construção de volumes	69
1.14	Quinta lista de exercícios	73

2	MATRIZES E SISTEMAS	75
2.1	Tipos de matrizes	75
2.2	Operações com matrizes	78
2.3	Matriz escalonada	80
2.4	Cálculo da inversa	82
2.5	Determinantes	83
2.6	Sexta lista de exercícios	86
2.7	Sistema de equações lineares	87
2.7.1	Introdução	87
2.7.2	Sistemas e matrizes.	88
2.7.3	Solução de um sistema por matriz inversa	91
2.8	Sétima lista de exercícios	92
2.9	Apêndice	94
2.9.1	Cálculo da inversa por adjunta	94
2.9.2	Regra de Cramer	95
3	ESPAÇOS VETORIAIS	100
3.1	Introdução	100
3.2	Subespaços	103
3.3	Intersecção de dois Subespaços Vetoriais	106
3.4	Combinação Linear	107
3.5	Dependência e Independência Linear	109
3.6	Subespaços Gerados	110
3.7	Soma de Subespaços	113
3.8	Base e Dimensão de um Espaço Vetorial	114
3.8.1	Base	114
3.8.2	Dimensão	117
3.8.3	Dimensão da Soma de Subespaços Vetoriais	118
3.8.4	Coordenadas	118
3.9	Mudança de Base	119
3.10	A Inversa da Matriz de Mudança de Base	121
3.11	Oitava lista de exercícios	123
4	TRANSFORMAÇÕES LINEARES	125
4.1	Propriedades das Transformações Lineares	129
4.2	Transformações Lineares e Matrizes	135
4.2.1	Transformação linear associada a uma matriz	135
4.2.2	Matriz de uma transformação linear	137
4.3	Composição de transformações lineares	141
4.4	A Inversa de uma transformação linear	141
4.5	Nona lista de exercícios	144

5	OPERADORES LINEARES	146
5.1	Transformações especiais no plano e no espaço	146
5.2	Propriedades dos operadores inversíveis	158
5.2.1	Matrizes Semelhantes	161
5.3	Operadores autoadjuntos e ortogonais	161
5.4	Décima lista de exercicios	162
5.5	Autovalores e Autovetores	164
5.5.1	Autovalores e autovetores de uma matriz	165
5.5.2	Polinômio Característico.	165
5.6	Décima primeira lista de exercícios	171
6	APLICAÇÕES	173
6.1	Aplicações da Álgebra Linear na Engenharia Cartográfica	173
6.2	Aplicações de espaços vetoriais na computação gráfica	174
6.3	Aplicações de autovalores e autovetores na engenharia civil . . .	180
6.3.1	O Problema de autovalor na avaliação de modelos estruturais de edificações	180

Capítulo 1

SUPERFÍCIES E CURVAS NO ESPAÇO

1.1 As Cônicas

O conhecimento das equações das cônicas no plano e de seus desenhos é fundamental para o entendimento das superfícies já que na maioria das vezes as seções das superfícies (principalmente das superfícies quádricas) serão curvas cônicas. As cônicas foram estudadas em Geometria Analítica I e sendo assim apresentaremos uma breve revisão enfocando os aspectos mais relevantes para que não haja dificuldades no estudo de superfícies.

Definição: Uma cônica em $\mathbb{R}^2$ é um conjunto de pontos cujas coordenadas satisfazem uma equação do segundo grau em x e y da forma geral:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Em nosso estudo vamos estudar as cônicas cujas equações são da forma reduzida:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

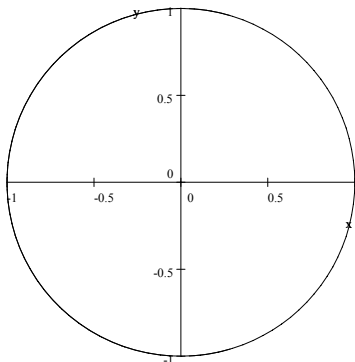
pois toda equação na forma geral pode ser escrita na forma reduzida mediante uma conveniente escolha de eixos coordenados. Vamos agora apresentar as cônicas cujo conhecimento é indispensável para o estudo das superfícies:

1.1.1 Circunferência

a) Circunferência: A equação de uma circunferência de raio r e centro no ponto $C(0, 0)$ é dada por

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Exemplo 1 : Se $r = 1$ temos a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$



Exemplo 2 : Faça um desenho da circunferência $x^2 + y^2 = 15$

Neste caso $r^2 = 15$ e portanto $r = \sqrt{15}$, logo temos uma circunferência de raio $\sqrt{15} = 3.873$

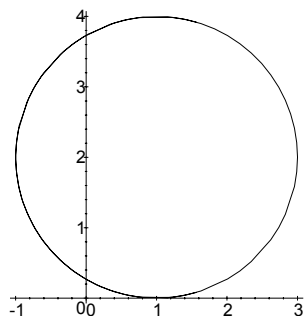
Exemplo 3 : Faça um desenho da circunferência $x^2 + y^2 = 36$

b) A circunferência com centro no ponto $C(x_0, y_0)$ e raio r tem a seguinte equação:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

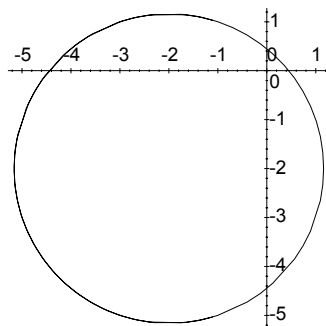
Exemplo 4 : Faça um desenho da circunferência $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$

É fácil ver que o centro da circunferência é $C(1, 2)$ e raio $r = 2$



Exemplo 5 : *Faça um desenho da circunferência $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 10$*

Observe que neste caso $x - x_0 = x + 2 = x - (-2)$ e portanto $x_0 = -2$, analogamente $y_0 = -2$. O centro da circunferência é $C(-2, -2)$ e o raio é $r = \sqrt{10} = 3.1623$



Exemplo 6 : *Faça um desenho da circunferência $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$.*

Neste caso não sabemos de imediato identificar a circunferência pois sua equação não está na forma padrão que nós conhecemos. Devemos então trabalhar com a equação de modo que possamos expressá-la na forma padrão. Isso pode ser feito usando o que chamamos de "completar os quadrados" do seguinte modo: Agrupando os termos em x e y temos

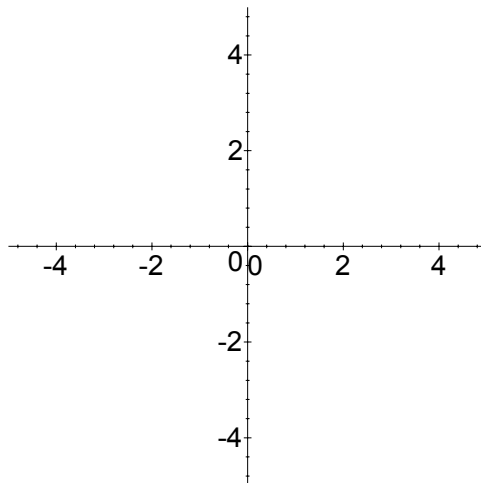
$$x^2 - 6x + y^2 + 4y + 12 = 0$$

De modo a obter um quadrado perfeito em x devemos ter a expressão $x^2 - 6x + 9$, e como não podemos alterar a equação acima vamos somar e diminuir 9

na equação . Da mesma maneira para obter um quadrado perfeito em y devemos ter a expressão $y^2 + 4y + 4$ e para isso vamos somar e diminuir 4 na equação . Note que este é um procedimento correto pois na realidade estamos adicionando *zero* a equação o que a mantém inalterada. Fazendo isso obteremos a mesma equação, apenas escrita de uma forma conveniente de modo a identificarmos a circunferência:

$$\begin{aligned}
 x^2 - 6x + y^2 + 4y + 12 &= 0 \\
 x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 + 4y + 4 - 4 + 12 &= 0 \\
 (x^2 - 6x + 9) - 9 + (y^2 + 4y + 4) - 4 + 12 &= 0 \\
 (x - 3)^2 - 9 + (y + 2)^2 - 4 + 12 &= 0 \\
 (x - 3)^2 - 9 + (y + 2)^2 - 4 + 12 &= 0 \\
 (x - 3)^2 + (y + 2)^2 - 1 &= 0 \\
 (x - 3)^2 + (y + 2)^2 &= 1
 \end{aligned}$$

Assim temos uma circunferência de raio $r = 1$ e centro em $C(3, -2)$. Complete este exemplo fazendo o desenho desta circunferência



1.1.2 Elipse

a) Elipse: A equação da elipse com centro na origem do sistema coordenado e semieixos a e b é da forma:

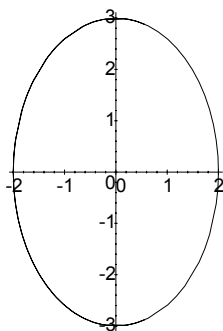
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Note que a circunferência é um caso particular da elipse quando $a = b = r$.

Exemplo 7 : *Faça um desenho da elipse*

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

Observe que o semi-eixo menor ocorre no eixo x e tem comprimento 2, o semi-eixo maior ocorre no eixo y e tem comprimento 3.



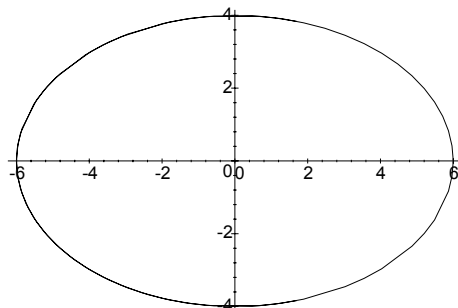
Exemplo 8 : *Faça um desenho da elipse*

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 4$$

Para fazermos o desenho da elipse devemos colocar a equação na forma padrão:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Neste caso temos $a^2 = 36$ e $b^2 = 16$, portanto o semi-eixo maior é $a = 6$ e o semi-eixo menor é $b = 4$



b) A elipse com os eixos paralelos aos eixos coordenados e com centro no ponto $C(x_0, y_0)$ tem equação da forma:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Para desenharmos esta elipse fazemos a mudança de variável

$$\begin{aligned} x' &= x - x_0 \\ y' &= y - y_0 \end{aligned}$$

e temos a equação da elipse no novo sistema de coordenadas

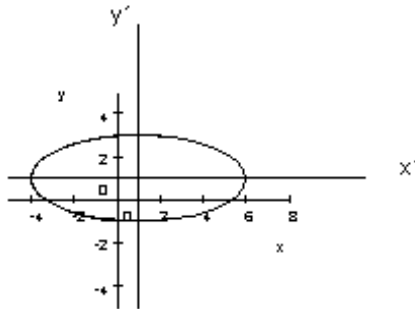
$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

Neste novo sistema $x'y'$ o centro da elipse será no ponto $C'(0, 0)$ e os semi-eixos serão a e b , enquanto que no sistema xy o centro é $C(x_0, y_0)$.

Exemplo 9 *Faça um desenho da elipse*

$$\frac{(x - 1)^2}{25} + \frac{(y - 1)^2}{4} = 1$$

Neste caso a elipse tem centro no ponto $C(1, 1)$ e semi-eixos $a = 5$ e $b = 2$

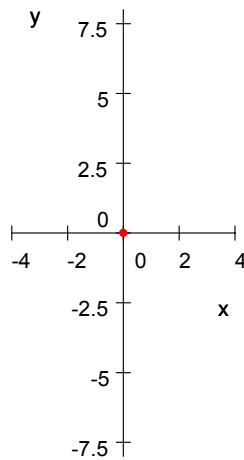


Exemplo 10 : *Faça um esboço da elipse*

$$\frac{(x+2)^2}{7} + \frac{(y-3)^2}{11} = 1$$

Exemplo 11 : *Faça um desenho da elipse* $25x^2 + 4y^2 - 50x + 8y - 59 = 0$

Sugestão: Complete os quadrados e coloque a equação na forma padrão da elipse



1.1.3 Parábola

A equação geral da parábola é da forma $Ax^2 + By + C = 0$ (eixo de simetria paralelo ao eixo y) ou $Ay^2 + Bx + C = 0$ (eixo de simetria paralelo ao eixo x).

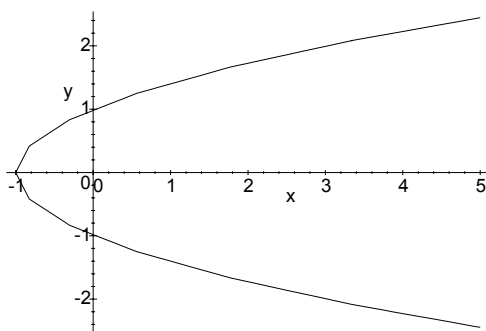
A equação da parábola com vértice na origem do sistema coordenado pode ser reduzida à forma mais simples $x^2 = 2py$ ou $y = ax^2$ (com $a = \frac{1}{2p}$).

Exemplo 12 : *Faça um desenho da parábola $y^2 - x = 1$*

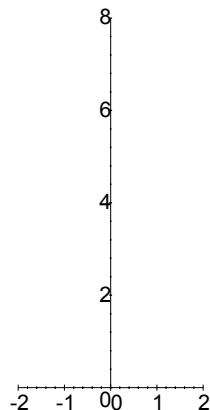
Neste caso o eixo de simetria é paralelo ao eixo x e podemos escrever a equação na forma

$$x = y^2 - 1$$

Note que a parábola corta o eixo dos y nos pontos $y_1 = 1$ e $y_2 = -1$ que são as raízes da equação $y^2 - 1 = 0$ e possui a concavidade voltada para a direção positiva do eixo y já que o coeficiente de y^2 é 1 (positivo):

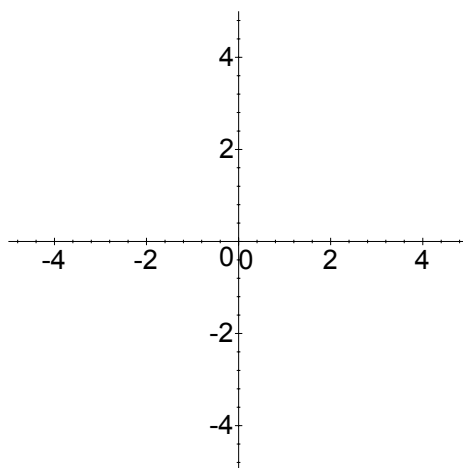


Exemplo 13 : *Faça um esboço da parábola $y = 8x^2$*



Exemplo 14 : *Faça um desenho da parábola $2y^2 - 4y - 2x - 2 = 0$*

Sugestão: Isole o x , encontre as raízes da equação de segundo grau em y (que são pontos onde a parábola corta o eixo dos y , fazendo $x = 0$) encontre o vértice. Use seus conhecimentos de cálculo I.



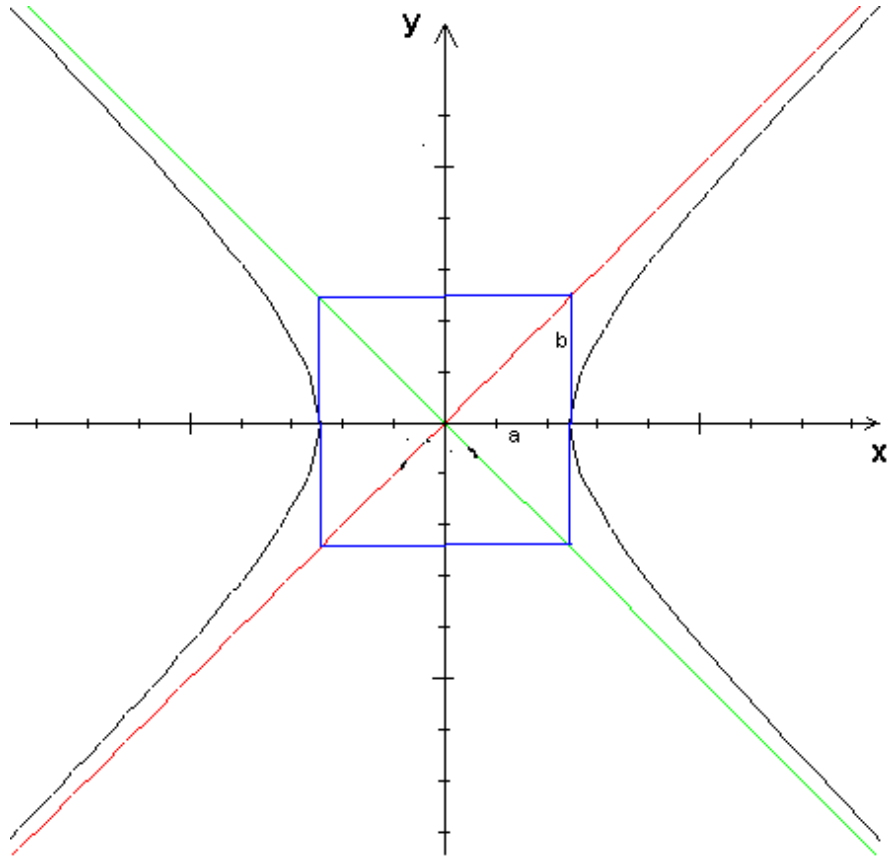
1.1.4 Hipérbole

Equação da hipérbole com centro no origem do sistema de coordenadas

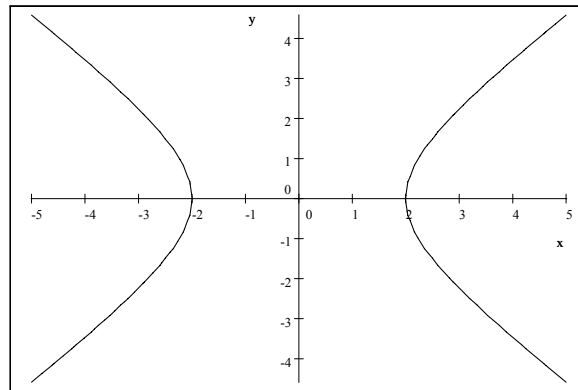
A equação da hipérbole é:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

quando o eixo real está sobre o eixo dos x e seu centro é a origem do sistema coordenado. As retas $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$ são chamadas assíntotas dessa hipérbole e os pontos $V_1(a, 0)$ e $V_2(a, 0)$ são chamados vértices dessa hipérbole.



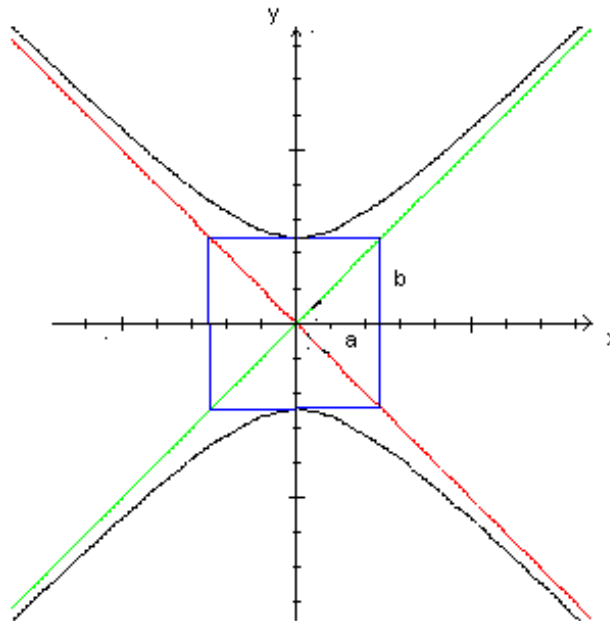
Exemplo 15 : $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$



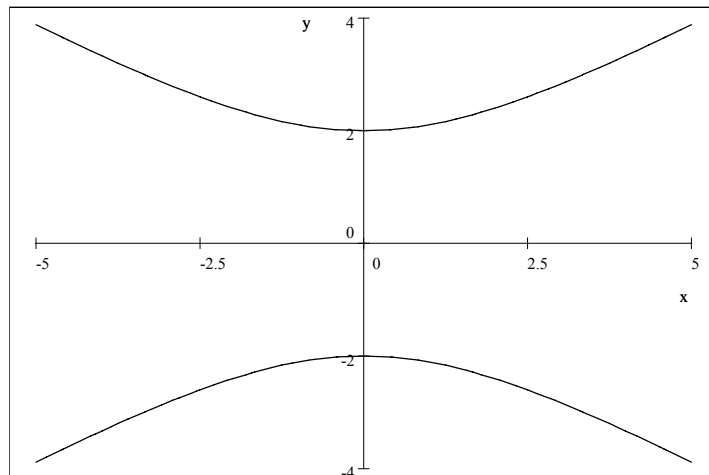
A equação da hipérbole é:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

quando o eixo real está sobre o eixo dos y e seu centro é a origem do sistema coordenado. As retas $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$ são as assíntotas dessa hipérbole e os pontos $V_1(0, b)$ e $V_2(0, -b)$ são os vértices.



Exemplo 16 : $\frac{y^2}{2^2} - \frac{x^2}{3^2} = 1$



Para desenhar uma hipérbole é conveniente inicialmente desenhar as assíntotas e marcar os vértices (pontos $P(a, 0)$ e $P(-a, 0)$ para o caso da hipérbole com eixo real no eixo dos x) e logo em seguida determinar mais dois ou tres pontos da hipérbole; quanto mais pontos da hipérbole forem obtidos melhor será o traçado.

Exemplo 17 : *Fazer o desenho da hipérbole*

$$9x^2 - 7y^2 - 63 = 0$$

Note que a equação desta hipérbole não está na forma padrão. Colocando na forma padrão temos:

$$\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$$

que é a equação reduzida da hipérbole com eixo real sobre o eixo dos x .

Neste caso, $a^2 = 7$ e $b^2 = 9$, portanto $a = \sqrt{7}$ e $b = 3$. As assintotas são as retas $y = \frac{3}{\sqrt{7}}x$ e $y = -\frac{3}{\sqrt{7}}x$. Os vértices serão os pontos $V_1 = (\sqrt{7}, 0)$ e $V_2 = (-\sqrt{7}, 0)$. Observe que para marcar os pontos devemos tomar $x \geq \sqrt{7}$ e $x \leq -\sqrt{7}$. Vamos agora determinar alguns pontos da hipérbole:

Para $x = 3$ temos:

$$\begin{aligned}
\frac{3^2}{7} - \frac{y^2}{9} &= 1 \\
-\frac{y^2}{9} &= 1 - 1.2857 \\
-\frac{y^2}{9} &= -.2857 \\
y^2 &= 2.5713 \\
y &= \pm 1.6035
\end{aligned}$$

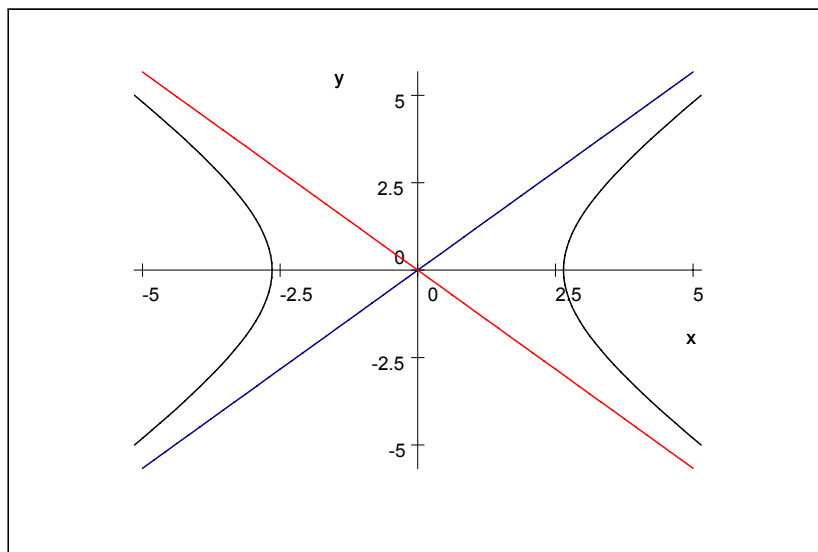
Para $x = 4$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{4^2}{7} - \frac{y^2}{9} &= 1 \\
-\frac{y^2}{9} &= 1 - 2.2857 \\
-\frac{y^2}{9} &= -1.2857 \\
y^2 &= 11.571 \\
y &= \pm 3.4016
\end{aligned}$$

Analogamente temos para $x = -3, y = \pm 1.6035$ e para $x = -4, y = \pm 3.4016$.

Colocando numa tabela de pontos temos

x	y
$\sqrt{7}$	0
$-\sqrt{7}$	0
3	± 1.6035
-3	± 1.6035
4	± 3.4016
-4	± 3.4016



Faça o desenho da hipérbole

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1$$

Equação da hipérbole com centro fora da origem do sistema de coordenadas

A equação da hipérbole com centro no Ponto $C(x_0, y_0)$ e eixo real paralelo ao eixo dos x é:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

A equação da hipérbole com centro no Ponto $C(x_0, y_0)$ e eixo real paralelo ao eixo dos y é:

$$\frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(x - x_0)^2}{a^2} = 1$$

Para fazermos o desenho de uma hipérbole com centro fora da origem procedemos da seguinte maneira: Consideramos os eixos auxiliares $x' = x - x_0$ e $y' = y - y_0$, logo temos as equações

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

ou

$$\frac{(y')^2}{b^2} - \frac{(x')^2}{a^2} = 1$$

Procedemos como descrito anteriormente usando os novos eixos auxiliares x' e y'

Exemplo 18 : *Fazer um desenho da hipérbole:*

$$9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$$

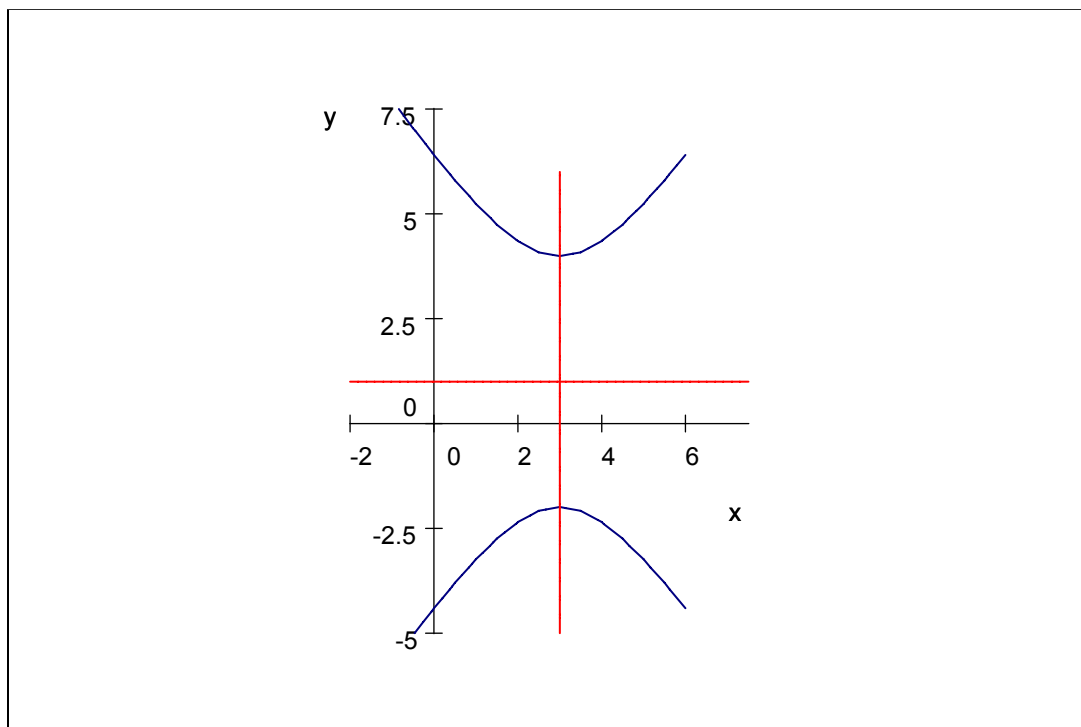
Devemos completar os quadrados e colocar a equação na forma padrão (faça isso como exercício) para obter:

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{4} = 1$$

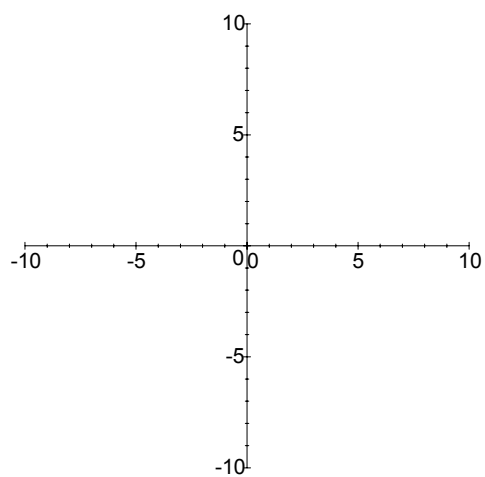
neste caso $x' = x - 3$ e $y' = y - 1$

$$\frac{(y')^2}{9} - \frac{(x')^2}{4} = 1$$

Neste novo sistema temos que os vértices são os pontos $V'_1 = (0, 3)$ e $V'_2 = (0, -3)$. Observe que no sistema xy os vértices são $V_1 = (3, 4)$ e $V_2 = (3, -2)$ e o centro é o ponto $C(3, 1)$



Exemplo 19 : *Faça um desenho da hipérbole $7x^2 - 9y^2 + 28x + 54y - 116 = 0$*



1.2 Superfícies

1.2.1 Introdução

Passaremos agora ao estudo das superfícies que será de grande auxílio em outras disciplinas e também na vida prática do acadêmico. Existem muitas definições de superfícies dependendo do nível de profundidade, mas nesta breve explanação de caráter introdutório daremos a definição mais simples e mais usual.

Definição: O conjunto dos pontos cujas coordenadas satisfazem uma única equação da forma $F(x, y, z) = 0$ é denominada superfície.

Exemplo 20 :

Plano: $x + y + z = 0$

Cilindro: $x^2 + y^2 = 4$

Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

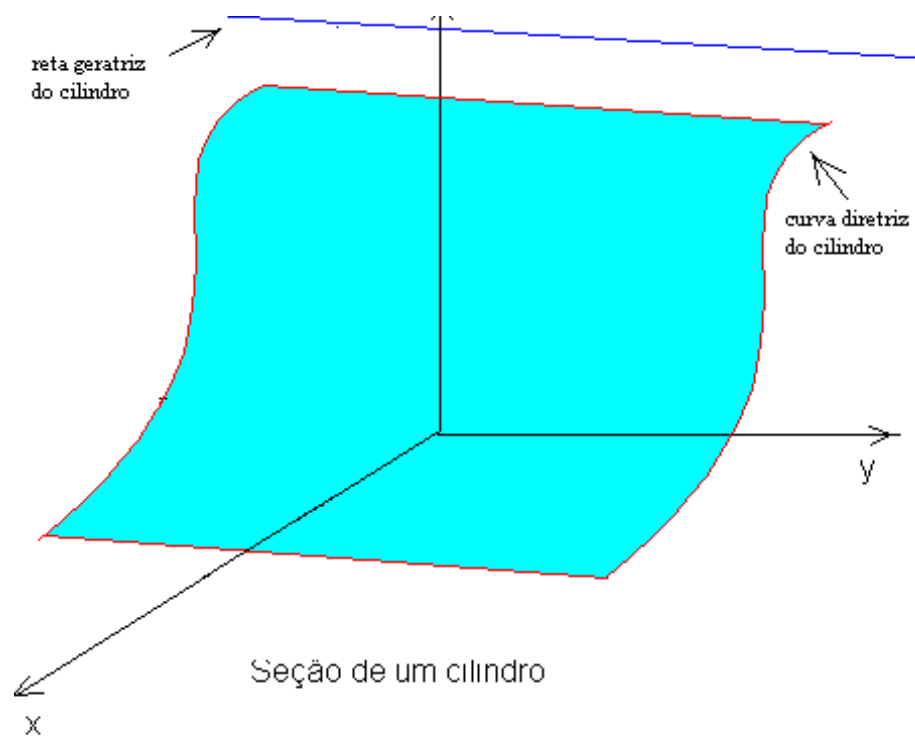
1.2.2 Superfície Cilíndrica

É a superfície gerada por uma linha reta que se move de maneira que é sempre paralela a uma dada reta fixa e passa sempre por uma curva dada também fixada. A reta que se move é denominada **geratriz** e a curva dada fixa é a **diretriz** da superfície cilíndrica. Em nosso estudo de superfície cilíndrica consideraremos a **diretriz** como sendo uma curva que se encontra num plano coordenado e a reta fixa será sempre o eixo coordenado que é ortogonal ao plano coordenado que contém a curva **diretriz**. A **diretriz** terá então uma das seguintes formas:

$$f(x, y) = 0 \text{ e } z = 0$$

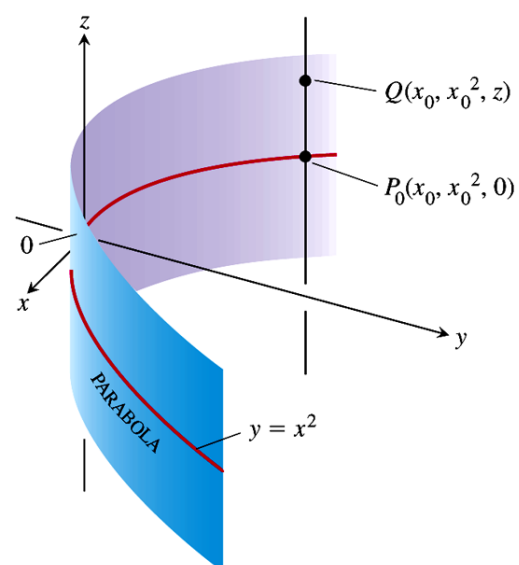
$$f(x, z) = 0 \text{ e } y = 0$$

$$f(y, z) = 0 \text{ e } x = 0$$

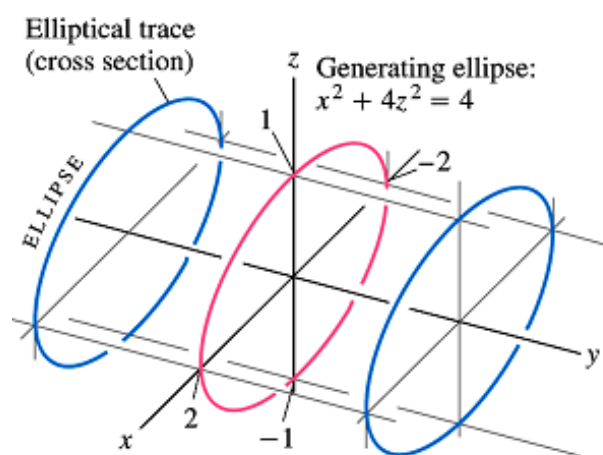


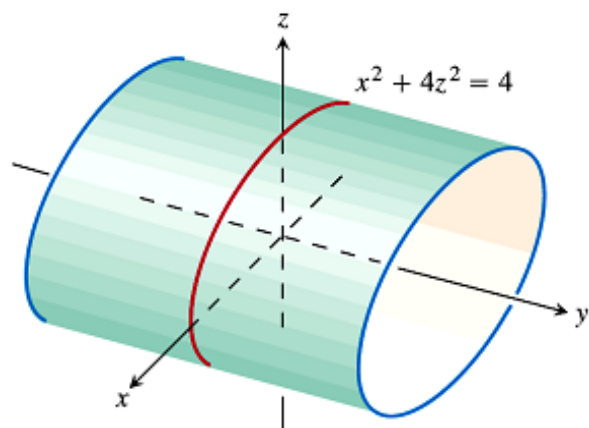
Observação: Um cilindro é uma superfície que se estende ao infinito e nos desenhos apenas desenhamos uma parte do cilindro onde subetende-se em qual direção o cilindro se estenderá. O desenho serve apenas para termos uma visualização parcial do cilindro no espaço para podermos melhor operar com eles analiticamente.

Exemplo 21 *Cilindro $y = x^2$*

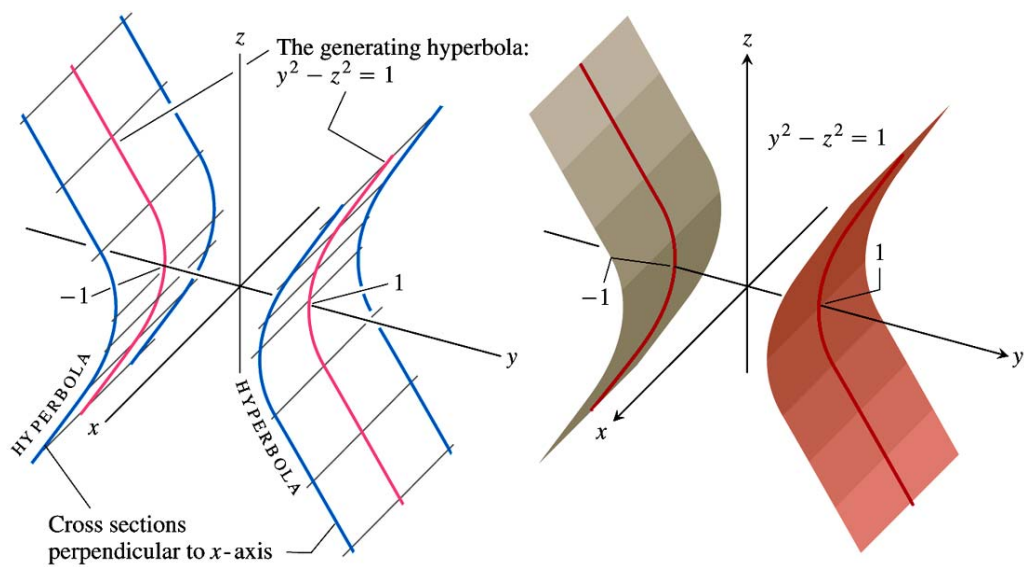


Exemplo 22 Cilindro $x^2 + 4z^2 = 4$



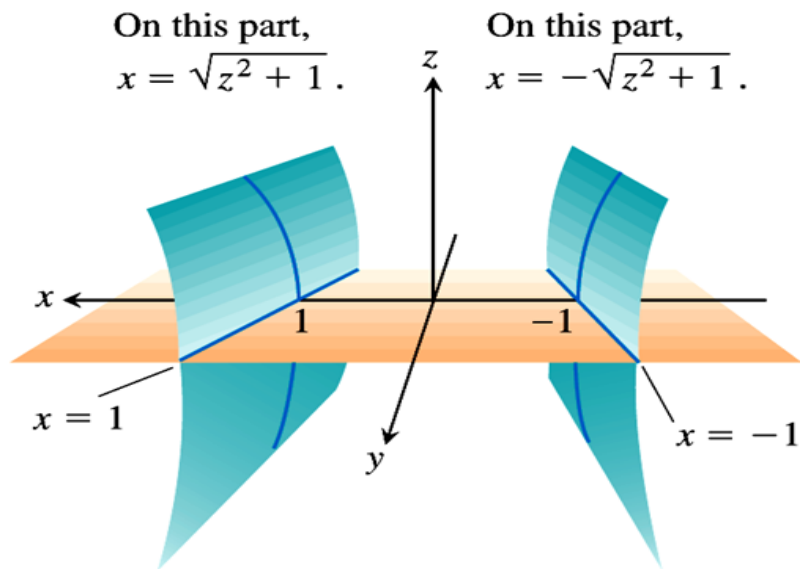


Exemplo 23 *Cilindro* $y^2 - z^2 = 1$



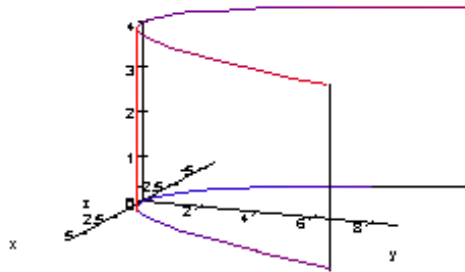
Exemplo 24 *Cilindro* $x^2 - z^2 = 1$

The hyperbolic cylinder $x^2 - z^2 = 1$

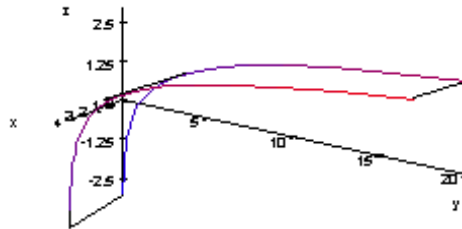


Exemplo 25 : Construir o cilindro cuja diretriz é a parábola $x^2 = 4y$ e $z = 0$

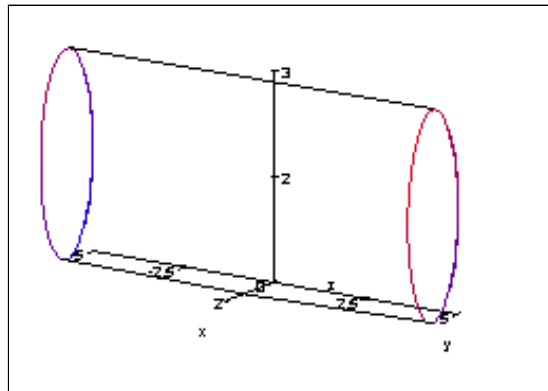
Observe que neste caso a curva está no plano xy e portanto a geratriz é o eixo z .



Exemplo 26 : Construir o cilindro $y = e^z, x = 0$.

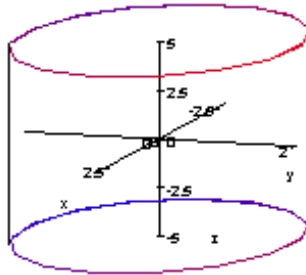


Exemplo 27 : Construir o cilindro dado pela diretriz $(x - 1)^2 + (z - 2)^2 = 1, y = 0$



Exemplo 28 : Construir o cilindro $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

De agora em diante omitiremos a variável que é igual a zero e forneceremos apenas a equação da curva em determinado plano subentendendo-se que se trata de um cilindro cuja diretriz é dada pela equação da curva indicada.



Exemplo 29 : Construir o cilindro cuja diretriz é a curva dada por $x^2 + y^2 = 4$ e $z = 0$

1.3 Cilindros projetantes de uma curva

Dada uma curva no espaço representada pela interseção das superfícies

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= 0 \\ f(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

podemos representa-la analiticamente por qualquer das equações de duas superfícies que se interceptam segundo a mesma curva. As superfícies mais amenas para se trabalhar são os cilindros e dada uma curva no espaço podemos sempre obter esta mesma curva através da interseção de dois cilindros. Com efeito, consideramos os sistemas equivalentes ao sistema (1.1) formado por um par qualquer das equações

$$\begin{aligned} F(x, y) &= 0 \\ G(y, z) &= 0 \\ H(x, z) &= 0 \end{aligned}$$

resultante da eliminação respectiva das variáveis x, y, z . Cada um desses sistemas representa a mesma curva C .

Geometricamente estes cilindros são obtidos projetando-se a curva nos três planos coordenados e por isso estes cilindros são chamados **cilindros projetantes da curva**.

Exemplo 30 : *Determinar os cilindros projetantes da curva dada pela interseção das superfícies*

$$\begin{aligned} 4x^2 + y^2 + z^2 - 7 &= 0 \\ 2x^2 + y^2 - z^2 + 1 &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Eliminando a variável x : Multiplicamos a segunda equação por 2 e a primeira por -1 e em seguida somamos as duas equações:

$$\begin{aligned} -4x^2 - y^2 - z^2 + 7 &= 0 \\ 4x^2 + 2y^2 - 2z^2 + 2 &= 0 \\ y^2 - 3z^2 + 9 &= 0 \\ 3z^2 - y^2 &= 9 \end{aligned}$$

Eliminando a variável y : Voltamos ao sistema (1.2) multiplicamos a segunda equação por -1 e somamos com a primeira equação

$$\begin{aligned} 4x^2 + y^2 + z^2 - 7 &= 0 \\ -2x^2 - y^2 + z^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2z^2 - 8 &= 0 \\ x^2 + z^2 &= 4 \end{aligned}$$

Eliminando a variável z : Voltamos ao sistema (1.2) e adicionamos as duas equações

$$\begin{aligned} 4x^2 + y^2 + z^2 - 7 &= 0 \\ 2x^2 + y^2 - z^2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6x^2 + 2y^2 - 6 &= 0 \\ 3x^2 + y^2 &= 3 \end{aligned}$$

A mesma curva representada pelo sistema (1.1) pode ser substituído por qualquer um dos sistemas seguintes formados pelos cilindros projetantes da curva:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} 3x^2 + y^2 = 3 \\ x^2 + z^2 = 4 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 3x^2 + y^2 = 3 \\ 3z^2 - y^2 = 9 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x^2 + z^2 = 4 \\ 3z^2 - y^2 = 9 \end{array} \right. \end{aligned}$$

1.4 Construção geométrica da curva formada pela interseção de seus cilindros projetantes

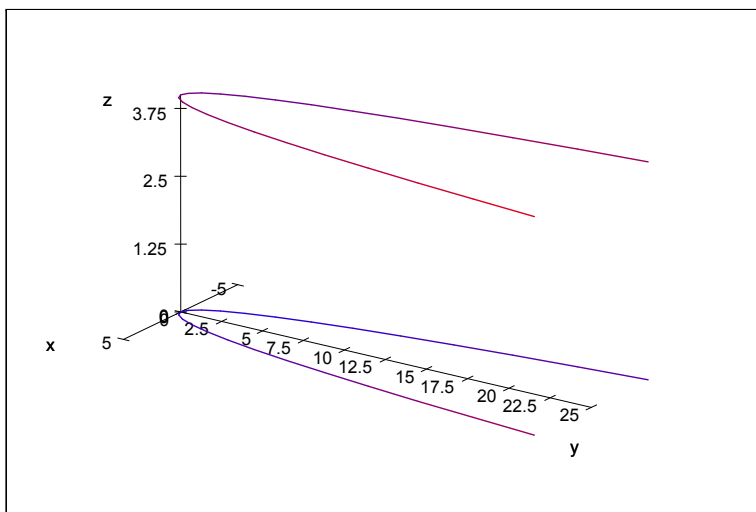
Para traçarmos a curva de interseção de dois cilindros projetantes não precisamos desenhar os cilindros completos, basta apenas desenharmos as curvas diretrizes de cada cilindro nos planos coordenados correspondentes e através de segmentos paralelos aos eixos coordenados podemos obter cada ponto da curva de interseção.

Consideremos os dois cilindros projetantes

$$\begin{cases} y &= x^2 \\ y^2 + z^2 &= 4 \end{cases}$$

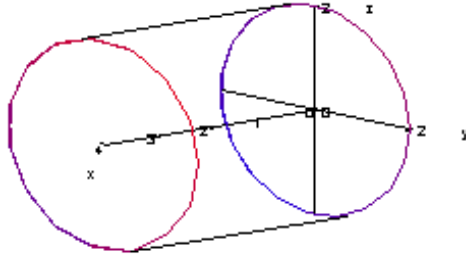
Inicialmente vamos desenhar cada cilindro separadamente e em seguida vamos construir a curva de interseção dos dois cilindros:

a) Cilindro $y = x^2$



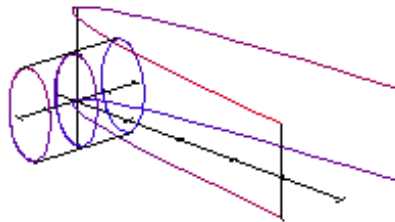
Note que no plano xy temos a parábola $y = x^2$

b) Cilindro $y^2 + z^2 = 4$



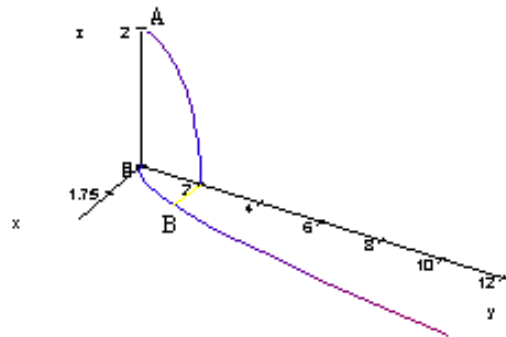
Note que no plano yz temos a circunferência $y^2 + z^2 = 4$

c) Vamos agora desenhar os dois cilindros conjuntamente no mesmo sistema de coordenadas



d) Vamos agora traçar a curva de interseção dos dois cilindros e para isso necessitamos apenas das curvas diretrizes nos respectivos planos coordenados. Depois de se obter a curva de interseção podemos então desenhar os cilindros para termos uma visualização completa dos cilindros e da curva de interseção.

Para simplificar a obtenção da curva de interseção adotaremos sempre o primeiro octante para efetuarmos o traçado sendo que para os outros octantes o procedimento é o mesmo e além disso por simetria podemos sempre inferir qual será a curva completa.



Claramente os pontos A e B pertencem a curva de interseção mas também podem ser obtidos usando-se a técnica geral de construção da curva de interseção que vamos agora descrever.

Vamos tomar um ponto P qualquer de uma das curvas e através de segmentos paralelos aos eixos coordenados "ir de encontro" a um ponto da outra curva. Na figura abaixo partimos do ponto P da curva $x^2 + y^2 = 4$ e vamos de encontro ao ponto Q da curva $y = x^2$. Para isso traçamos inicialmente o segmento PM paralelo ao eixo z e em seguida o segmento MQ paralelo ao eixo x

O ponto C da curva de interseção dos dois cilindros é agora obtido através da interseção da reta r que passa pelo ponto Q e é paralela ao segmento PM com a reta s que passa pelo ponto P e é paralela ao segmento QM .

Utilizando este mesmo procedimento com vários pontos obtemos a curva de interseção:

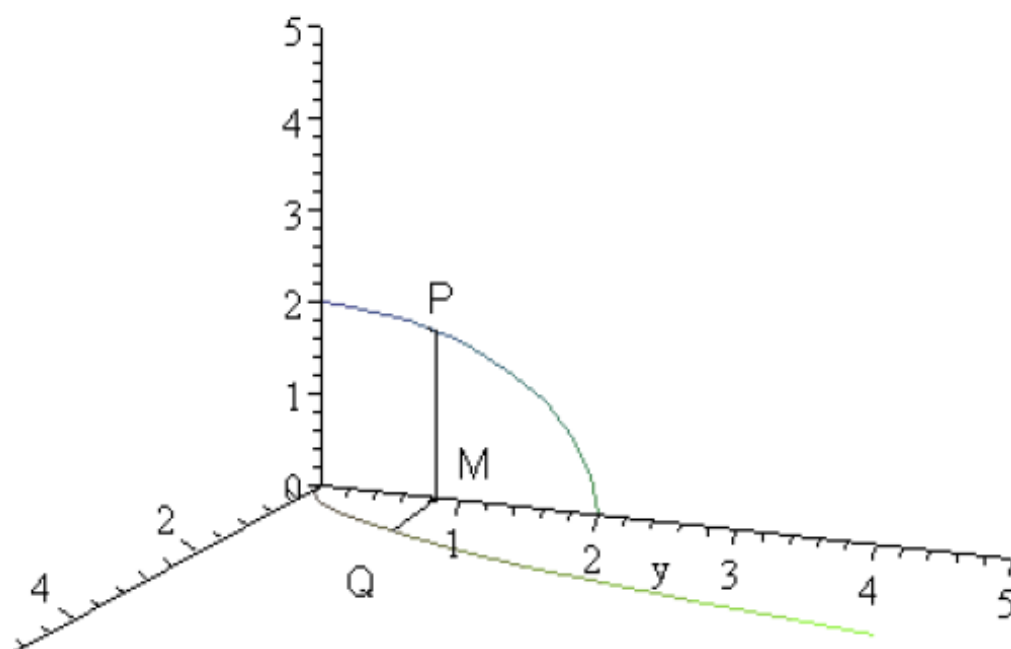


Figura 1.1:

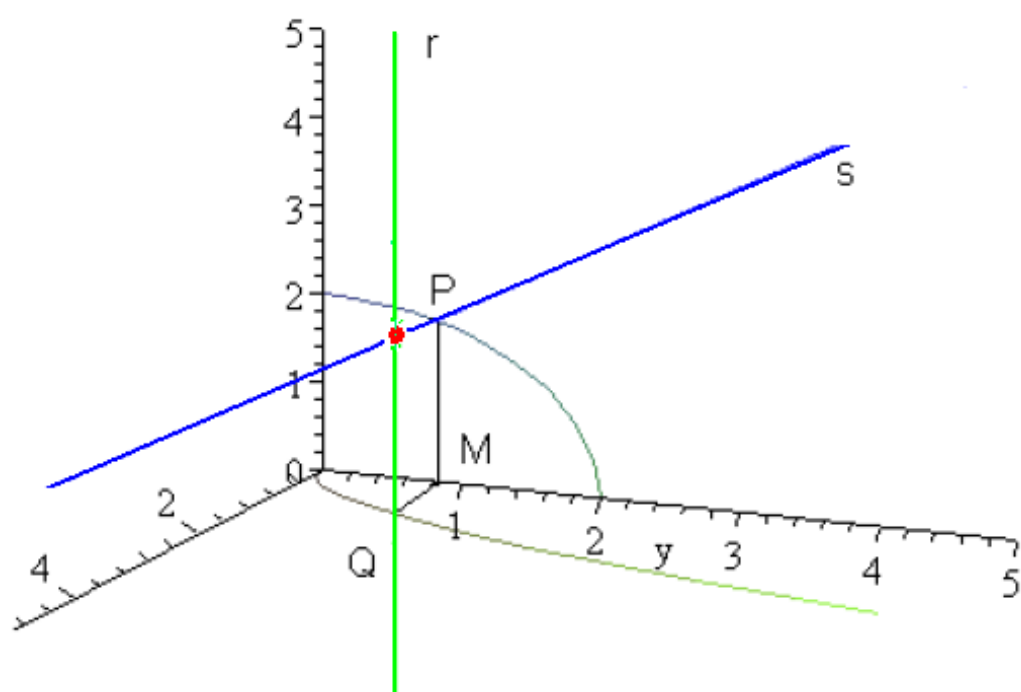
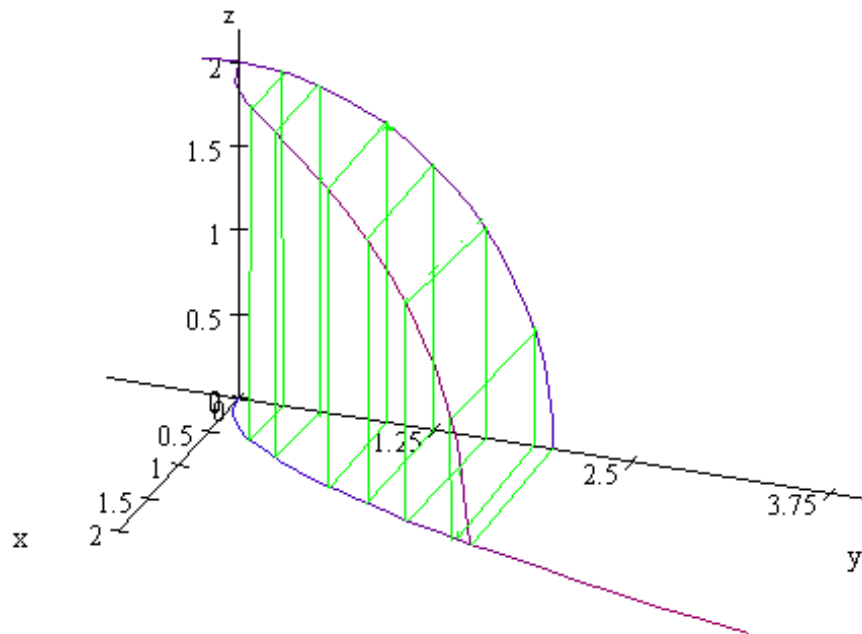
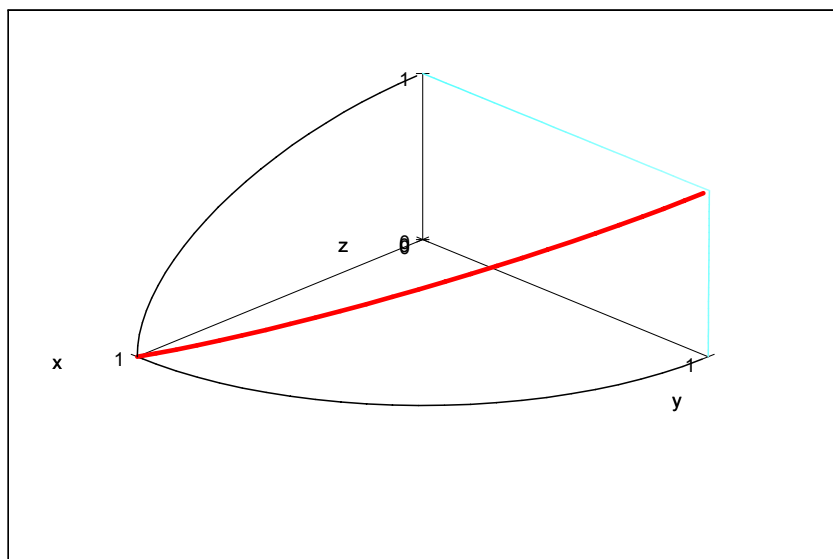


Figura 1.2:

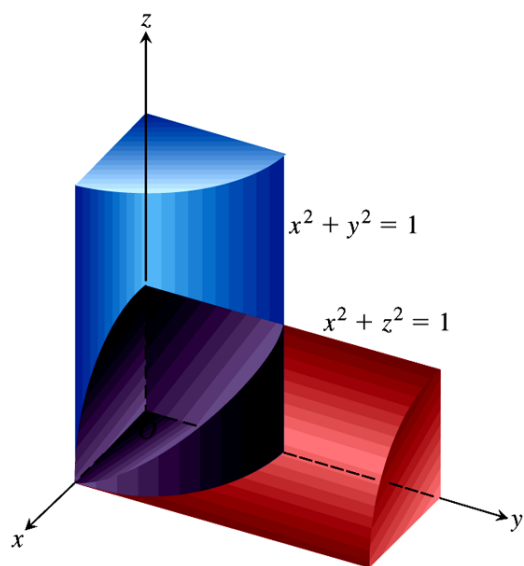


Exemplo 31 : *Obter a curva de interseção dos cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + z^2 = 1$.*

Vamos apenas desenhar as curvas diretrizes nos planos coordenados (utilizando somente o primeiro octante) e através do processo descrito acima vamos encontrar a curva de interseção dos cilindros.



Agora desenhemos no primeiro octante o desenho completo da interseção dos dois cilindros,

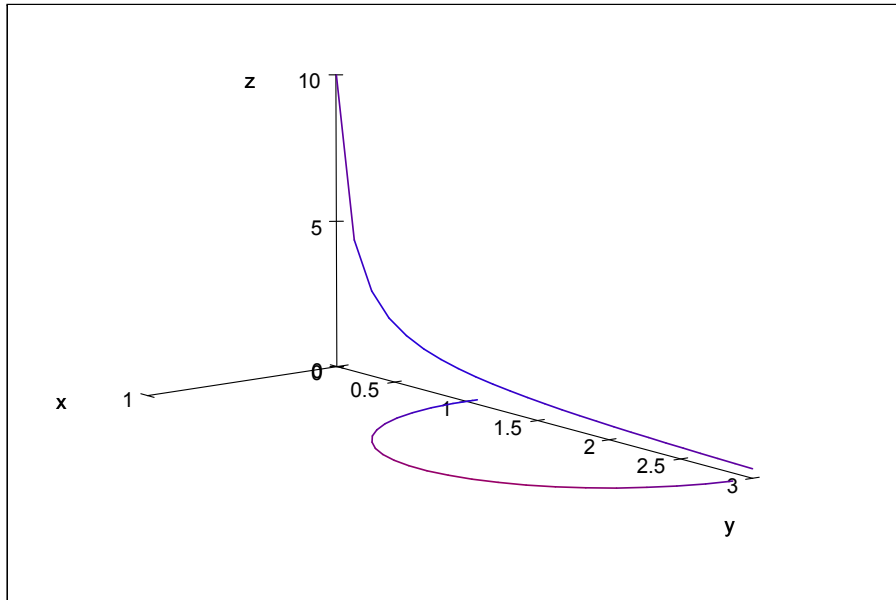


Exemplo 32 : *Utilizando o procedimento descrito acima obtenha a curva de*

interseção dos cilindros, no primeiro octante, dados por:

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{y} \\ x^2 + (y-2)^2 &= 1 \end{aligned}$$

Note que neste caso devemos ter $y > 0$.



Exemplo 33 : Determine dois cilindros projetantes da curva dada pela interseção das superfícies dadas abaixo e faça um desenho da curva de interseção das superfícies no primeiro octante do sistema $0x, 0y$ e $0z$.

$$\begin{cases} 7x^2 + 14y^2 + 63z^2 - 28y = 63 \\ 6x^2 + 3y^2 - 27z^2 - 24y + 27 = 0 \end{cases}$$

Solução: Para obter os cilindros projetantes devemos trabalhar com as equações de modo a eliminar sucessivamente as variáveis x, y e z . Para melhor trabalhar com as equações observe que podemos simplificá-las um pouco, dividindo a primeira equação por 7 e a segunda por 3. Fazendo isso temos:

$$x^2 + 2y^2 + 9z^2 - 4y = 9 \quad (1.3)$$

$$2x^2 + y^2 - 9z^2 - 8y = -9 \quad (1.4)$$

Observe que facilmente podemos eliminar a variável z somando as equações:

$$+ \begin{cases} x^2 + 2y^2 + 9z^2 - 4y = 9 \\ 2x^2 + y^2 - 9z^2 - 8y = -9 \end{cases}$$

$$3x^2 + 3y^2 - 12y = 0$$

Para eliminar a variável x multiplicamos a primeira equação por 2 e subtraímos a segunda equação da primeira:

$$- \begin{cases} 2x^2 + 4y^2 + 18z^2 - 8y = 18 \\ 2x^2 + y^2 - 9z^2 - 8y = -9 \end{cases}$$

$$3y^2 + 27z^2 = 27$$

Observe que neste caso não vamos conseguir eliminar facilmente a variável y , mas como já temos dois cilindros projetantes vamos usá-los para obter a curva de interseção. Os cilindros projetantes são:

$$3x^2 + 3y^2 - 12y = 0$$

$$3y^2 + 27z^2 = 27$$

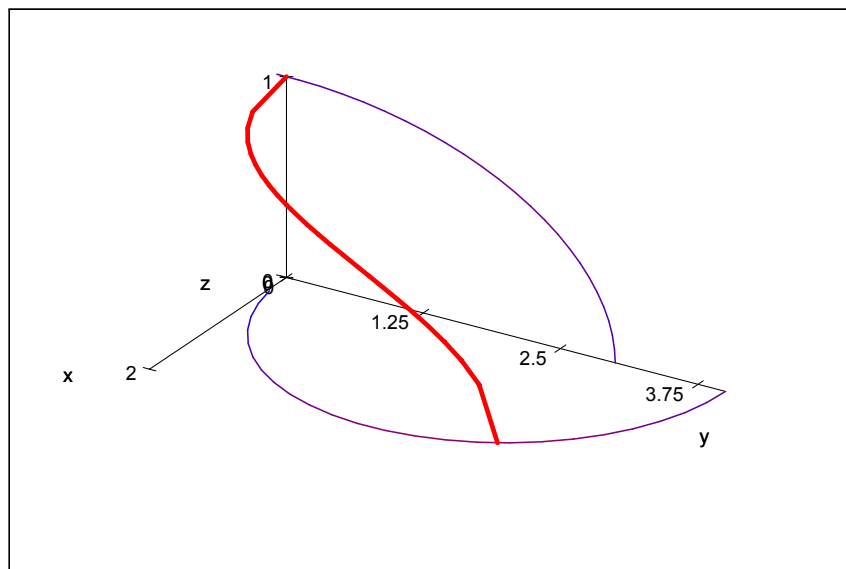
Note que na equação $3x^2 + 3y^2 - 12y = 0$ temos y e y^2 , logo devemos "completar os quadrados" de modo a obter uma equação mais simples para podermos identificar a curva e fazer seu desenho:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3y^2 - 12y &= 0 \\ x^2 + y^2 - 4y &= 0 \\ x^2 + y^2 - 4y + 4 - 4 &= 0 \\ x^2 + (y^2 - 4y + 4) - 4 &= 0 \\ x^2 + (y^2 - 4y + 4) &= 4 \\ x^2 + (y - 2)^2 &= 4 \end{aligned}$$

Portanto os cilindros projetantes são:

$$\begin{aligned} x^2 + (y - 2)^2 &= 4 \\ \frac{y^2}{9} + z^2 &= 1 \end{aligned}$$

Observe que o primeiro cilindro é gerado por uma circunferência de raio 2 no plano xy com centro no ponto $C(0, 2)$ e o segundo cilindro é gerado por uma elipse no plano yz com semi-eixo maior 3 no eixo y e semi-eixo menor 1 no eixo z



1.5 Primeira lista de exercícios

- 1) Construir os cilindros projetantes das curvas e construir a curva dada pela interseção das superfícies:
 - a) $x^2 + 2y^2 + z^2 = 2$ e $x^2 - y^2 - 2z^2 + 1 = 0$
 - b) $x^2 + y^2 + z^2 + z = 124$ e $x^2 - y^2 - z^2 + 3z = 0$
 - c) $4x^2 + y^2 + z^2 = 72$ e $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$
 - d) $x^2 - 3y^2 - 3x + z = 0$ e $x^2 + y^2 + x + z = 0$
 - e) $2x^2 + 3y^2 + z = 12$ e $2x^2 - y^2 - 3z + 4 = 0$
 - f) $3y^2 + x + 2z = 12$ e $y^2 - x + 2z = 4$
 - g) $y^2 + 4z^2 - 3x = 4$ e $y^2 - z^2 + 2x = 0$
 - h) $y^2 + 4z^2 - 3x = 4$ e $y^2 - z^2 + 2x = 4$
 - i) $x^2 + 2y^2 + 9z^2 - 4y = 92$ e $x^2 + y^2 - 9z^2 - 8y + 9 = 0$
 - j) $x^2 + 2y^2 + z^2 - 4z = 4$ e $x^2 - y^2 - 2z^2 + 8z = 0$
 - k) $x^2 - y^2 + 8z + 4y = 0$ e $2x^2 + y^2 + 4z - 4y = 0$

1.6 Equações Paramétricas

Uma curva no espaço pode se representada por três equações da forma

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases} \quad (1.5)$$

t	x	y	z
-4	1	-4	16
-3	1	-3	9
-2	1	-2	4
-1	1	-1	1
0	1	0	0
1	1	1	1
2	1	2	4
3	1	3	9
4	1	4	16

Figura 1.3:

onde cada coordenada do ponto da curva depende um parâmetro t . Convencionase usar a notação t para o parâmetro em virtude das equações paramétricas serem usadas na física para representar o movimento de uma partícula em função do tempo. Mas poderemos usar outras notações para o parâmetro, como por exemplo θ e s .

Se na primeira equação isolarmos o valor de t e substituimos este valor nas outras duas equações teremos as equações da curva na forma cartesiana:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= 0 \\ G(x, z) &= 0 \end{aligned}$$

Estas são as equações cartesianas dos cilindros projetante da curva (1.5)

Exemplo 34 : *Fazer um desenho da curva*

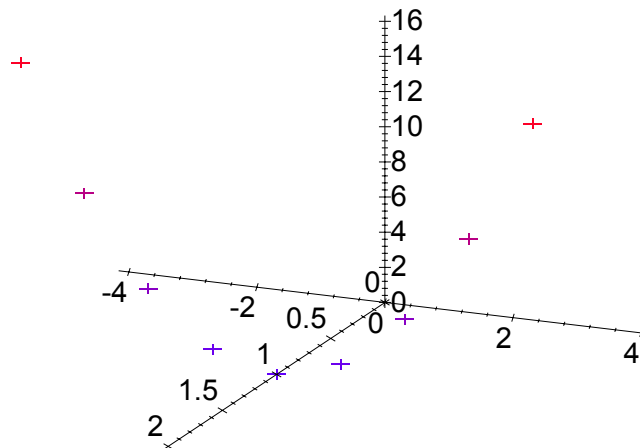
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t^2 \end{cases}$$

Para fazer o esboço da curva podemos proceder de dois modos:

a) Determinamos cada ponto da curva atribuindo valores ao parâmetro t :

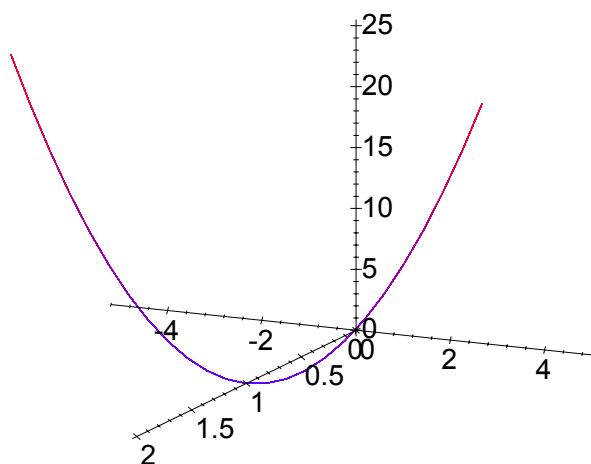
Marcamos cada um dos pontos no sistema tridimensional

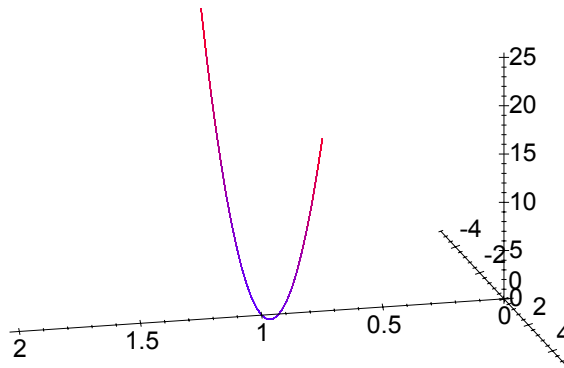
$P_1(1, -4, 16), P_2(1, -3, 9), P_3(1, -2, 4), P_4(1, -1, 1), P_5(1, 0, 0), P_6(1, 1, 1),$
 $P_7(1, 2, 4), P_8(1, 3, 9), P_9(1, 4, 16)$



8

Em seguida unimos os pontos para visualizarmos a curva. É claro que quanto mais pontos tivermos mais preciso será o traçado da curva. As equações paramétricas são ideais para fazermos traçados de curvas no computador pois o computador pode computar em pouquíssimo tempo uma grande quantidade de parâmetros e pontos da curva.



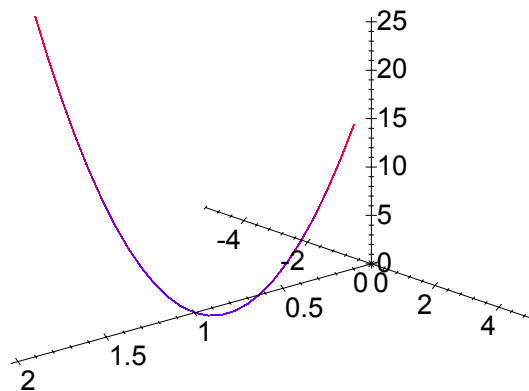


b) Outra maneira é passar as equações paramétricas para as equações cartesianas:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ z = y^2 \end{cases}$$

logo temos uma parábola em cima do plano $x = 1$. A projeção da parábola no plano zy tem equação $z = y^2$



Equações paramétricas de algumas curvas:

Circunferência com Centro $C(x_0, y_0)$ e raio r no plano:

$$x(\theta) = x_0 + r \cos \theta$$

$$y(\theta) = y_0 + r \sin \theta$$

Elipse com centro $C(x_0, y_0)$ e semi-eixos a e b no plano.

$$x(\theta) = x_0 + a \cos \theta$$

$$y(\theta) = y_0 + b \sin \theta$$

Reta com vetor diretor $\vec{v} = (a, b, c)$ passando pelo ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ no espaço

$$x(t) = x_0 + at$$

$$y(t) = y_0 + bt$$

$$z(t) = z_0 + ct$$

Exemplo 35 *Desenhe a curva*

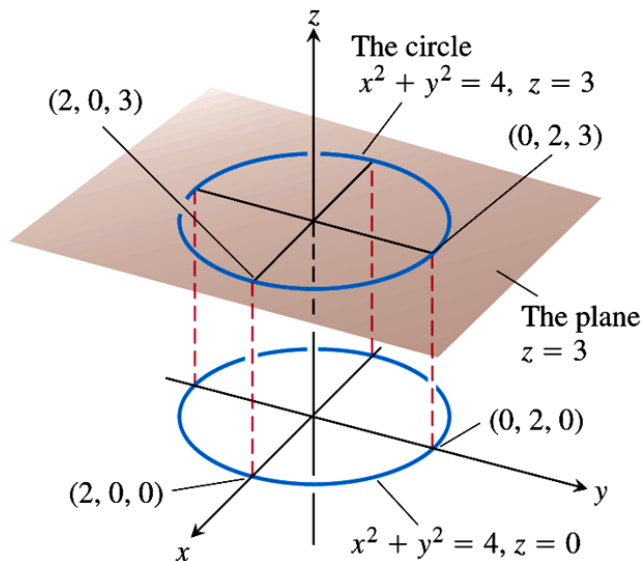
$$\begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \\ z = 3 \end{cases}$$

Passando para coordenadas cartesianas temos

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$z = 3$$

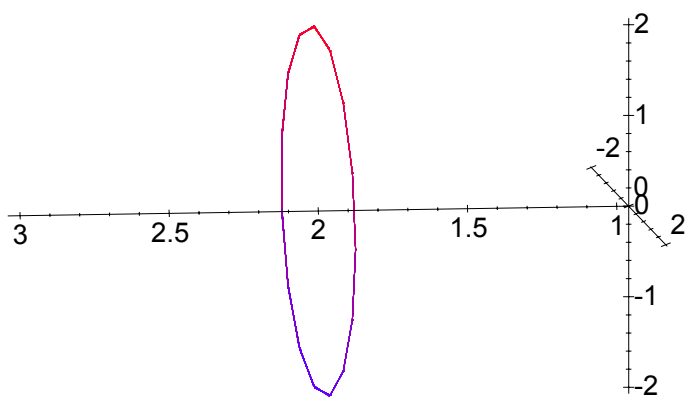
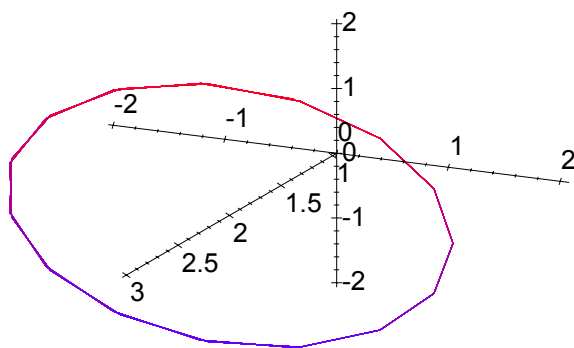
logo a curva é uma circunferência em cima do plano $z = 3$ e a projeção dessa curva no plano xy é a circunferência $x^2 + y^2 = 4$:



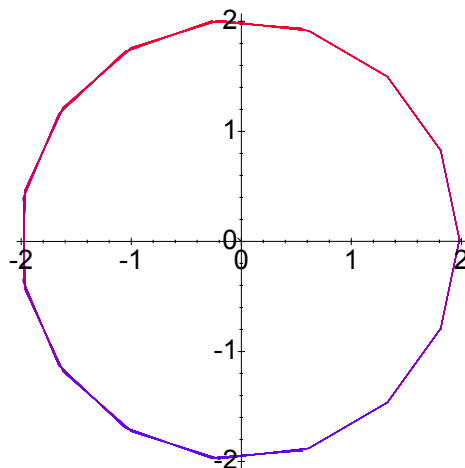
Exemplo 36 : *Desenhe a curva*

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \cos \theta \\ z = 2 \sin \theta \end{cases}$$

Observe que a projeção da curva no plano yz é uma circunferência de raio 2. Portanto temos uma circunferência de raio 2 em cima do plano $x = 2$



Projeção no plano yz



Exemplo 37 : *Desenhe a curva*

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \cos \theta \\ z = 3 \sin \theta \end{cases}$$

1.7 Equação Vetorial das curvas

Uma curva pode ser determinada pelo vetor posição de cada ponto da curva. Neste caso cada ponto da curva será dado por um vetor cuja extremidade se encontra em um ponto da curva.

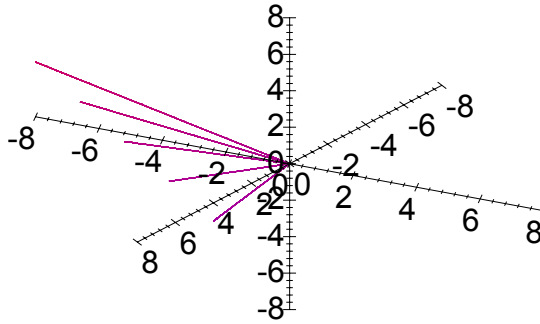
E equação vetorial é da forma:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Exemplo 38 : *Desenhar a curva:* $\vec{r}(t) = (t+2)\vec{i} + (2t-4)\vec{j} + (1-t)\vec{k}$

Para cada valor de t teremos um vetor que indicará um ponto da curva

$$\left[\begin{array}{c|c} t & \vec{r}(t) \\ 0 & 2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k} \\ -1 & \vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k} \\ 1 & 3\vec{i} - 2\vec{j} \\ -2 & -8\vec{j} + 3\vec{k} \\ 2 & 4\vec{i} - 1\vec{k} \end{array} \right]$$



Assim como no caso das equações paramétricas necessitamos um grande número de vetores para traçarmos a curva. Podemos ter uma idéia da curva passando a equação vetorial para equações paramétricas e daí para equações cartesianas. Deste modo podemos usar todo o nosso conhecimento anterior.

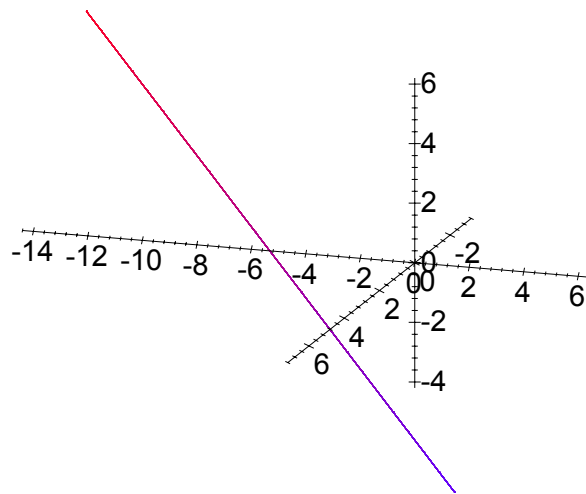
A equação vetorial é:

$$\vec{r}(t) = (t + 2)\vec{i} + (2t - 4)\vec{j} + (1 - t)\vec{k}$$

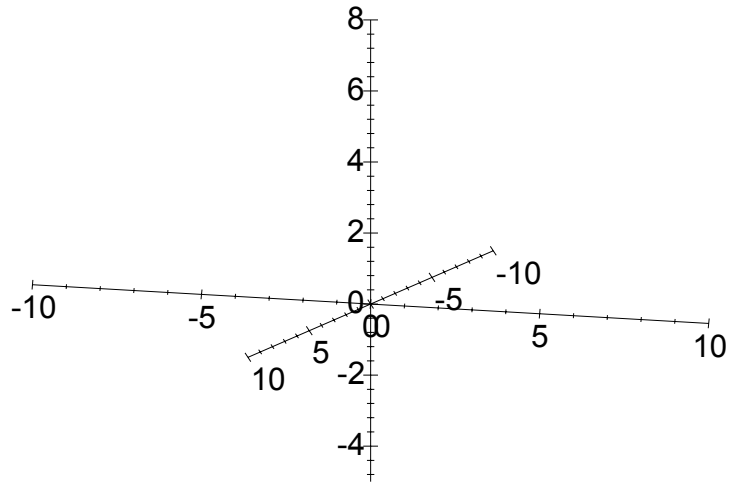
Note que da equação vetorial podemos ver que:

$$\begin{cases} x(t) = 2 + t \\ y(t) = -4 + 2t \\ z(t) = 1 - t \end{cases}$$

que são as equações paramétricas da reta que tem vetor diretor $\vec{v} = (1, 2, -1)$ e passa pelo ponto $P(2, -4, 1)$



Exemplo 39 : *Desenha a curva $r(t) = \cos(t) \vec{i} + 2\sin(t) \vec{j} + 4 \vec{k}$*



1.8 Segunda lista de exercícios

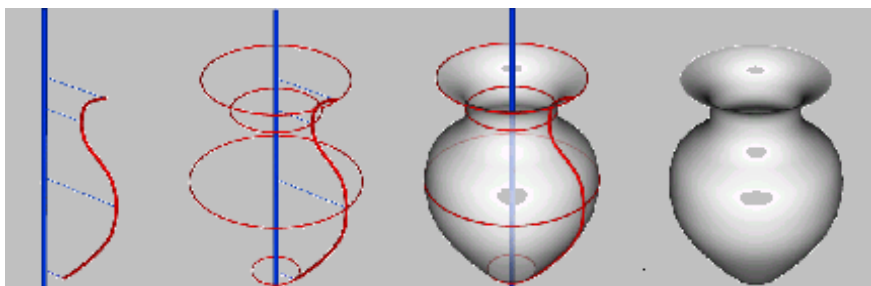
- 1) Escrever as equações paramétricas das seguintes curvas
 - a) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e $z = 2$
 - b) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e $y = 2x$
 - c) $x^2 + y^2 = 1$ e $y = z$
 - d) $x^2 + 2y^2 + z^2 = 2$ e $x^2 - y^2 - 2z^2 + 1 = 0$
 - e) $x^2 + y^2 = 4$ e $x + y - z = 0$
 - f) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e $x = 2$
- 2) Desenhar a curva $x = 4 \cos t$, $y = 9 \sin t$, $z = 1$
- 3) Desenhar a curva $x = t$, $y = 0$, $z = e^t$
- 4) Escrever a equação cartesiana da curva $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \cos t + \sin t$
- 5) Construir a curva cujas equações vetoriais são dadas abaixo:
 - a) $\vec{r}(t) = (-2t - 3)\vec{i} + (2t - 4)\vec{j} + (4t - 7)\vec{k}$
 - b) $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + 4t^2\vec{j} + t\vec{k}$
 - c) $\vec{r}(t) = \cos \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} + \sin \theta \vec{k}$
 - d) $\vec{r}(t) = 4 \sin^2 \theta \vec{i} + 2 \cos \theta \vec{j} + 2 \sin \theta \vec{k}$

1.9 Superfícies de revolução

1.9.1 Introdução

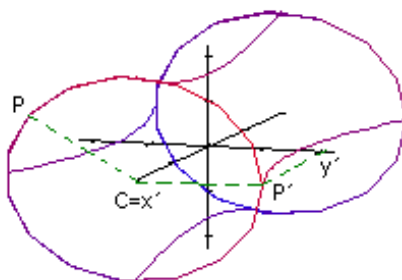
Superfície de revolução é a superfície gerada pela rotação de uma curva plana dada em torno de uma reta fixa no plano da referida curva. A curva plana que será rotacionada é denominada **geratriz** e a reta fixa é o eixo de revolução ou simplesmente eixo da superfície.

Na figura abaixo, a reta vertical é o eixo de revolução e a curva a direita da reta é a geratriz



1.9.2 Equação de uma Superfície de Revolução

Seja G a geratriz no plano xy e tendo equações $f(x, y) = 0$ e $z = 0$ e seja x o eixo de revolução da superfície. Vamos agora determinar a equação da superfície de revolução gerada pela rotação da geratriz G em torno do eixo x . Considere $P(x, y, z)$ um ponto genérico da superfície de revolução e seja $P'(x', y')$ um ponto da curva geratriz G , ambos pertencentes a um mesmo plano $x = C$ (Note que o ponto $P(x, y, z)$ é gerado pela rotação do ponto $P'(x', y')$ em torno do eixo x).



Vemos que $|\overline{CP}| = |\overline{CP'}|$. Mas $|\overline{CP}|^2 = y^2 + z^2$ e portanto $|\overline{CP}| = \pm\sqrt{y^2 + z^2}$. Como P' pertence a curva G temos $|\overline{CP'}| = y'$. Como P e P' se encontram no mesmo plano $x = C$ concluímos que $x = x'$. Logo,

$$\begin{aligned} y' &= \pm\sqrt{y^2 + z^2} \\ x' &= x \end{aligned}$$

Da equação $f(x', y') = 0$ vem que $f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$ é a equação da superfície de revolução.

Exemplo 40 : *Seja G a geratriz no plano xz tendo equações $f(x, z) = 0$ e $y = 0$ e seja z o eixo o eixo de revolução da superfície. Determinar a equação da superfície de revolução gerada pela rotação da geratriz G em torno do eixo z .*

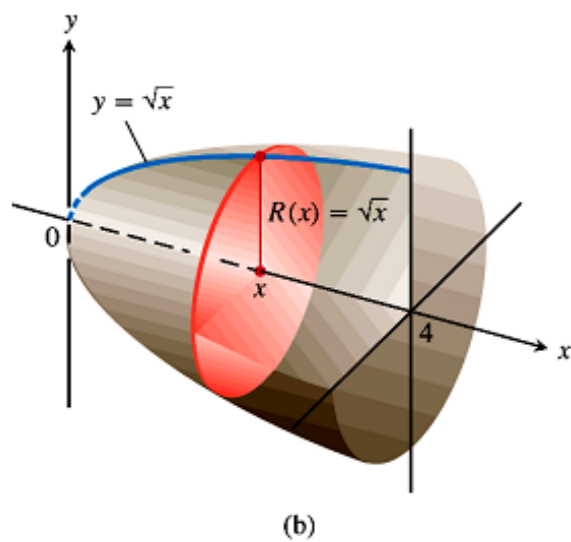
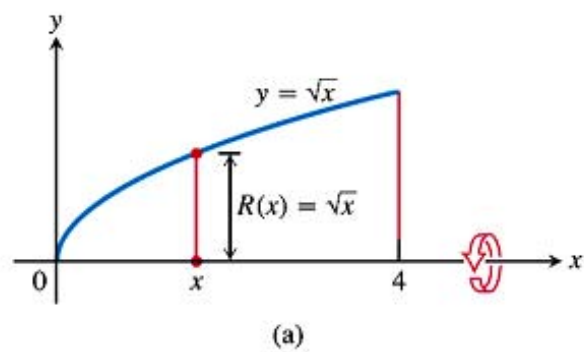
Observe que a curva está no plano xz e o eixo de revolução é o eixo z . Como vimos acima não devemos alterar a variável que define o eixo, portanto não alteramos a variável z , logo devemos substituir a variável x pela expressão $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$. Portanto a equação da superfície será $f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z)$.

Exemplo 41 : *Seja G a geratriz no plano yz tendo equações $f(y, z) = 0$ e $x = 0$ e seja y o eixo o eixo de revolução da superfície. Determinar a equação da superfície de revolução gerada pela rotação da geratriz G em torno do eixo y .*

Exemplo 42 : *Determinar a equação da superfície de revolução determinada pela rotação da curva $y = \sqrt{x}$ em torno do eixo x e obter o desenho da superfície de revolução*

Como o eixo de revolução é o eixo x devemos substituir a variável y pela expressão $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$ na equação da curva geratriz. Portanto a equação da superfície é:

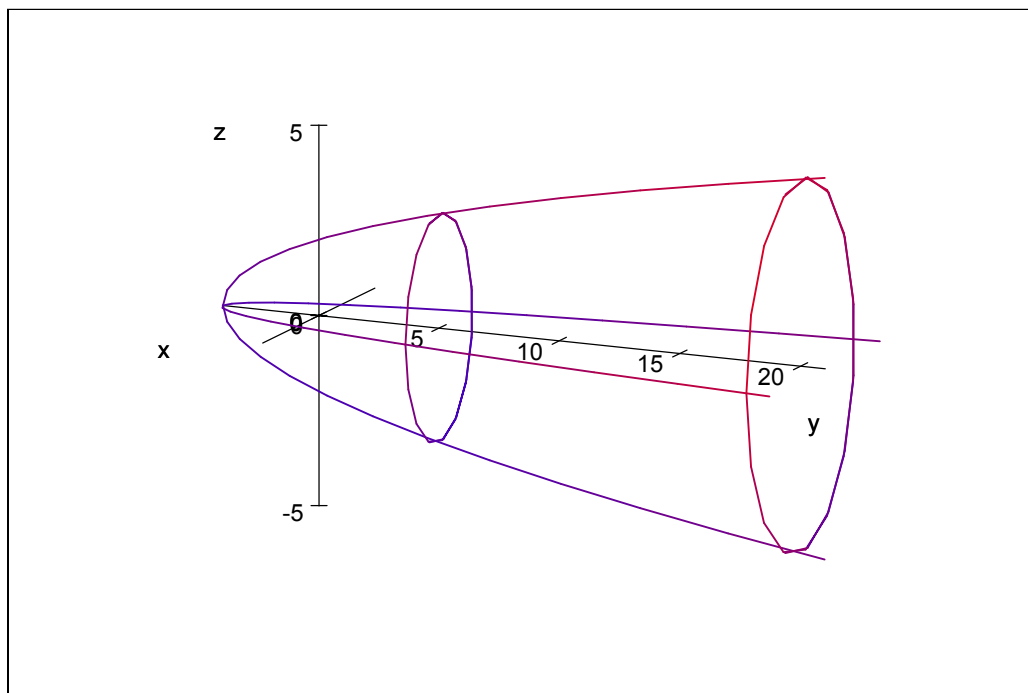
$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x} \\ \pm\sqrt{y^2 + z^2} &= \sqrt{x} \\ y^2 + z^2 &= x \end{aligned}$$



Exemplo 43 : Determinar a equação da superfície de revolução gerada pela rotação da parábola $y = x^2 - 4$ em torno do eixo y e fazer um desenho da superfície de revolução:

Como o eixo de revolução é o eixo y devemos substituir a variável x pela expressão $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$ na equação da curva geratriz. Portanto a equação da superfície é:

$$\begin{aligned}y &= (\pm\sqrt{x^2 + z^2})^2 - 4 \\y &= x^2 + z^2 - 4 \\y + 4 &= x^2 + z^2\end{aligned}$$



Exemplo 44 : *Determinar a equação da superfície de revolução gerada pela rotação da curva $y = \sin x$ em torno do eixo x e fazer um desenho da superfície:*

Como o eixo de revolução é o eixo x devemos substituir y pela expressão $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$ na equação da curva geratriz:

$$\pm\sqrt{y^2 + z^2} = \sin x$$

De modo a "eliminar os sinais" elevamos ambos os membros da equação ao quadrado:

$$\left(\pm\sqrt{y^2 + z^2}\right)^2 = (\sin x)^2$$

Portanto a equação da superfície é

$$y^2 + z^2 = \sin^2 x$$

Faça o desenho dessa superfície.

1.10 Terceira lista de exercícios

1) Encontre a equação da superfície de revolução gerada pela rotação da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ em torno do eixo x e faça o desenho da superfície.

2) O segmento de reta que une a origem ao ponto (a, b) rotaciona em torno do eixo y . Encontre a equação e faça um desenho desta superfície.

3) A superfície chamada "Toro" é obtida quando se rotaciona o círculo $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ em torno do eixo x . Encontre a equação deste "Toro" e faça um desenho desta superfície

4) Encontre a equação da superfície obtida pela rotação da parábola $y^2 = 4ax$ em torno do eixo x . Faça um desenho desta superfície.

5) Faça um desenho das seguintes superfícies de revolução:

Curva $y = e^x$ em torno do eixo y .

Curva $y = \sqrt{x}$, $1 \leq x \leq 4$ em torno do eixo x

Curva $y = \frac{2}{1+(x-2)^2}$ em torno do eixo x

Curva $y = 2 + \sin x$, $0 \leq x \leq 2\pi$, em torno do eixo x

Curva $y = e^{-x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$, em torno do eixo x

1.11 Quádricas

1.11.1 Introdução

Definição 45 Uma **quádrlica** ou **superfície quádrlica** é o conjunto dos pontos do espaço tridimensional, cujas coordenadas cartesianas verificam uma equação do segundo grau, a no máximo, três variáveis:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

denominada **equação cartesiana da superfície quádrlica**.

Observação: Se o termo independente J da equação acima for nulo, a quádrlica passa pela origem, pois o ponto $O(0, 0, 0)$ satisfaz tal equação.

1.11.2 Exemplos de quádricas

Esferas, parabolóides, elipsóides, hiperbolóides, cilindros (do 2º grau), cones (do 2º grau) constituem as mais conhecidas superfícies quádrlicas.

Acrescem-se: pares de planos, pontos ou conjuntos vazios, que podem ser representados por uma equação de segundo grau em três variáveis no $\mathbb{R}^3$ e constituem as **quádricas degeneradas**.

Exemplos:

- a) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 10z + 13 = 0$ (esfera)
- b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 1$ (elipsóide)
- c) $xy + yz + xz - 2x + 2 = 0$ (hiperbolóide)
- d) $x^2 + y^2 - z = 4$ (parabolóide)
- e) $x^2 + 2y^2 - y + z - 3xy + xz - yz = 0$ (superfície cilíndrica)
- f) $x^2 + y^2 + z^2 - 3xy - 2xz - 2yz = 0$ (superfície cônica)
- g) $x^2 - 25 = 0$ (dois planos paralelos)
- h) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - y + 2z + 10 = 0$ (um ponto - quádrlica degenerada)
- I) $x^2 + y^2 + z^2 + 3 = 0$ (conjunto vazio)

Apesar de existirem infinitos tipos de quádrlicas existem dois grupos de quádrlicas muito importantes em aplicações e qualquer quádrlica sempre poderá ser colocado num desses grupos mediante uma mudança de sistema de coordenadas. Veremos agora estes dois importantes conjuntos de quádrlicas:

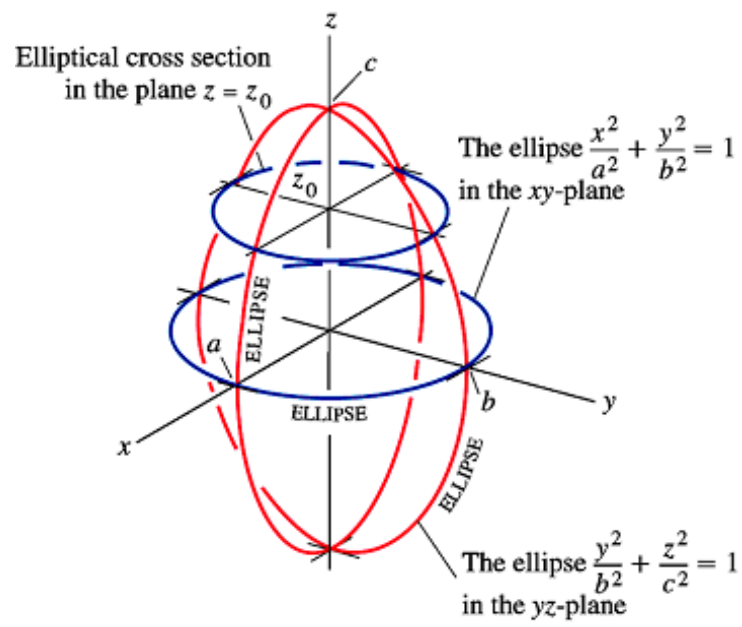
1.11.3 Classificação das quádrlicas cêntricas

Elipsóide Equação

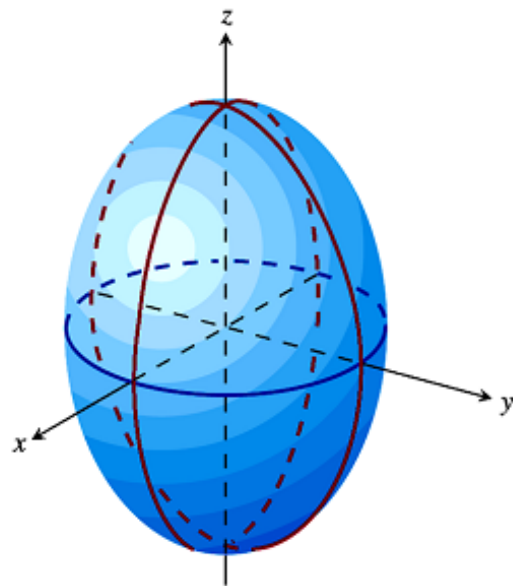
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Propriedades:

- Centrado na origem
- Pontos de intersecção com os eixos coordenados:
 $P_1(a, 0, 0), P_2(-a, 0, 0), P_3(0, b, 0), P_4(0, -b, 0), P_5(0, 0, c)$ e $P_6(0, 0, -c)$
- Secções paralelas ao plano XY: elipses
- Secções paralelas ao plano XZ: elipses
- Secções paralelas ao plano YZ: elipses
- As distâncias a, b, c são chamados de semi-eixos do elipsóide
- Se dois dos semi-eixos são iguais obtemos um elipsóide de revolução.
- Se todos os semi-eixos são iguais obtemos uma esfera.



Superfície



Exemplo 46 :

1) Elipsóide

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} + \frac{z^2}{5^2} = 1$$

2) Esfera de raio 2

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{2^2} = 1$$

Hiperbolóide de uma folha

Equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

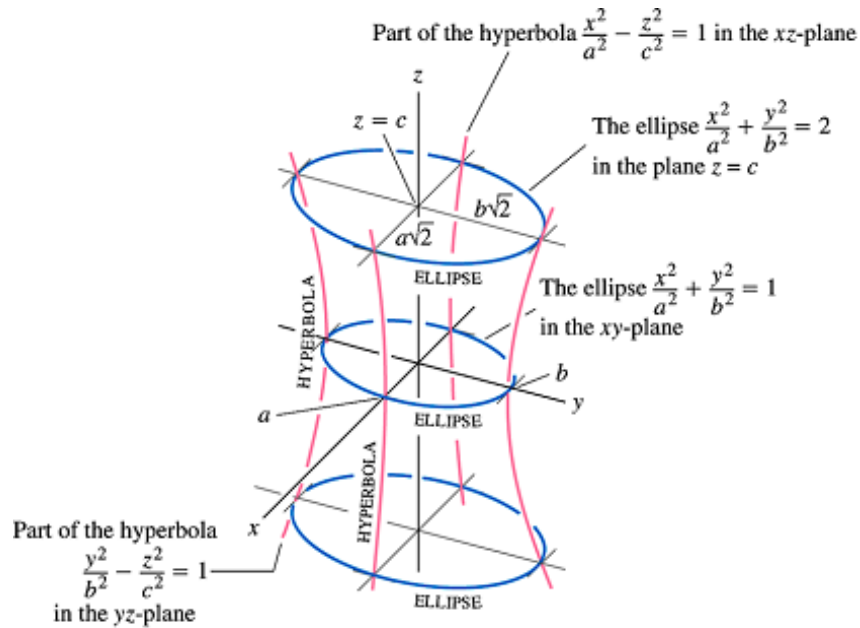
Propriedades

- Centrado na origem
- Pontos de intersecção com os eixos coordenados:

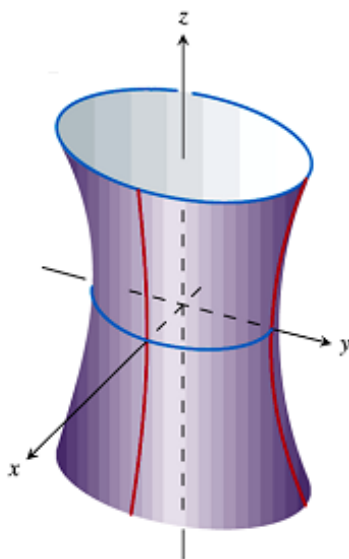
$P_1(a, 0, 0), P_2(-a, 0, 0), P_3(0, b, 0), P_4(0, -b, 0)$

- Secções paralelas ao plano XY: elipses
- Secções paralelas ao plano XZ: hipérboles
- Secções paralelas ao plano YZ: hipérboles

Se $a = b$ obtemos um hiperbolóide de revolução.



Superfície



Exemplo 47 :

1) Hiperbolóide de uma folha

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} - \frac{z^2}{5^2} = 1$$

2) Hiperbolóide de uma folha de revolução

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{2^2} - \frac{z^2}{3^2} = 1$$

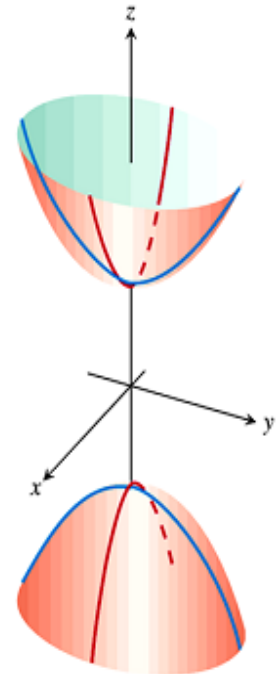
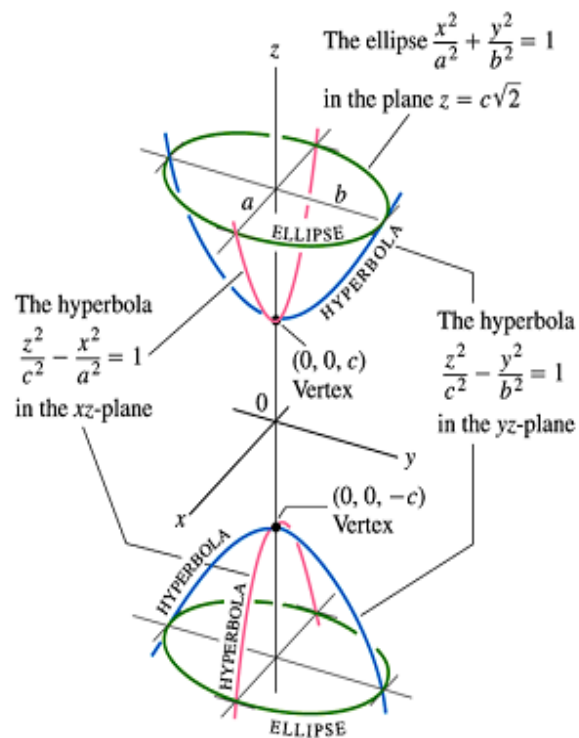
Hiperbolóide de duas folhas Equação:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Propriedades

- Centrado na origem
- Pontos de intersecção com os eixos coordenados: $P_1(0, 0, c)$, $P_2(0, 0, -c)$
- Secções paralelas ao plano XY: elipses

- Secções paralelas ao plano XZ: hipérbolas
 - Secções paralelas ao plano YZ: hipérbolas
 - Se $a = b$ obtemos um hiperbolóide de duas folhas de revolução.
- Superfície



- 1) Hiperbolóide de duas folhas

$$-\frac{x^2}{4^4} - y^2 + z^2 = 1$$

- 2) Hiperbolóide de duas folhas de revolução

$$-x^2 - y^2 + z^2 = 1$$

Cone elíptico

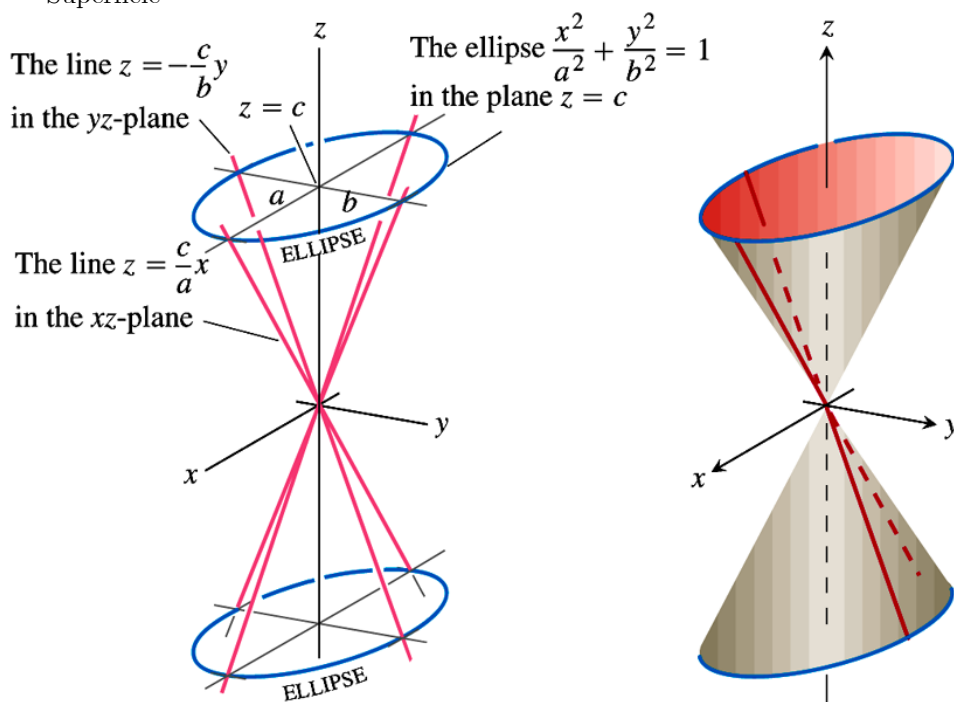
Equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Propriedades

- Pontos de intersecção com os eixos coordenados: $P_0(0, 0, 0)$

- Secções paralelas ao plano XY (Plano $z = 0$): Ponto $P_0(0, 0, 0)$, caso contrário elipses
 - Secções paralelas ao plano XZ (Plano $y = 0$): duas retas concorrentes, caso contrário hipérboles
 - Secções paralelas ao plano YZ (Plano $x = 0$): duas retas concorrentes, caso contrário hipérboles
 - Se $a = b$ obtemos um cone de revolução.
- Superfície



Cone Elíptico

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{5^2} - \frac{z^2}{4^2} = 0$$

Cone circular ou cone de revolução

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{5^2} - \frac{z^2}{4^2} = 0$$

1.11.4 Classificação das quádricas não cêntricas

Veremos agora as quádricas não cêntricas que possuem vértices na origem e eixos em cima dos eixos coordenados

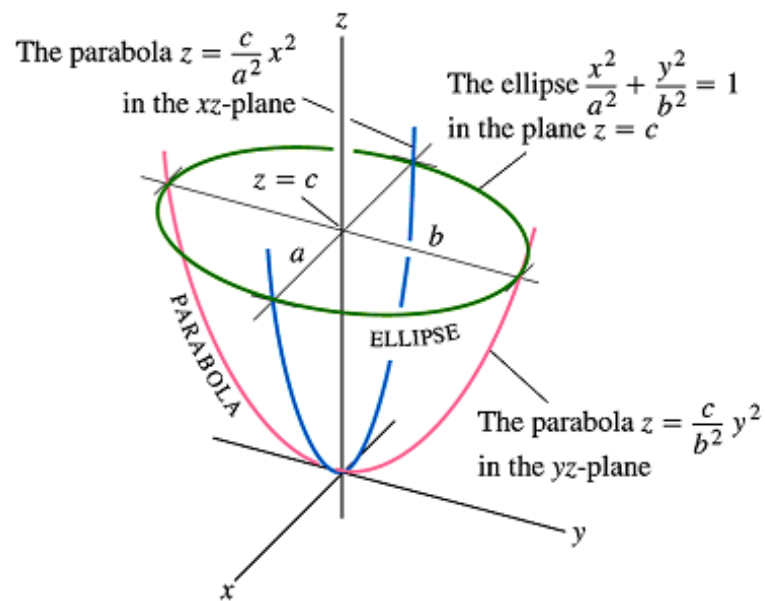
Parabolóide elíptico

Equação

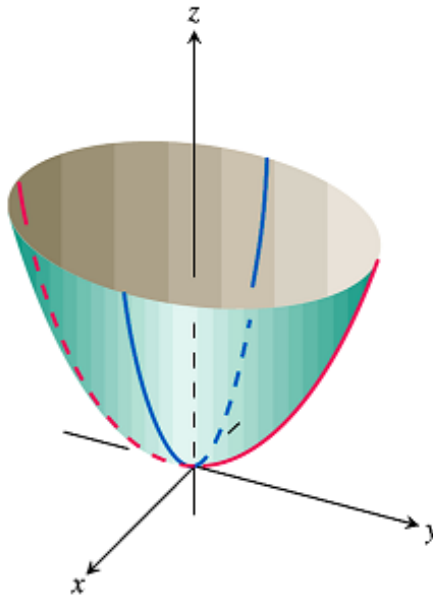
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$$

Propriedades

- Secções paralelas ao plano XY: elipses
- Secções paralelas ao plano XZ: parábolas
- Secções paralelas ao plano YZ: parábolas
- O ponto $P_0(0, 0, 0)$ é chamado de vértice
- Se $a = b$ temos um parabolóide de revolução.



Superfície



Exemplo 48 : *Parabolóide elíptico*

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = z$$

Exemplo 49 : *Parabolóide de revolução*

$$\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{10^2} = z$$

Parabolóide hiperbólico

Equação

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = cz$$

que é a forma canônica da equação do parabolóide hiperbólico ao longo do eixo dos z .

As outras formas canônicas são:

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = by \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = ax$$

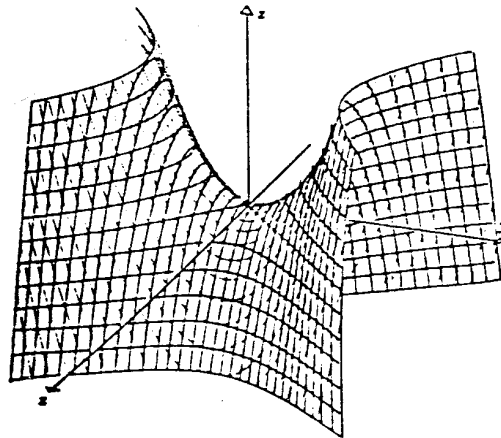
Propriedades

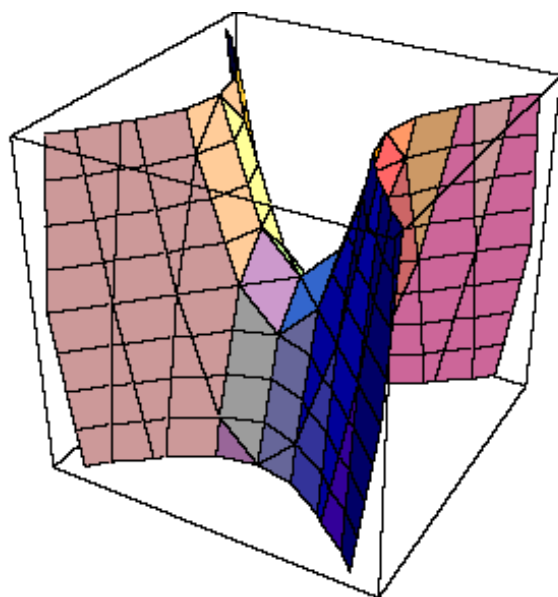
No caso da equação do tipo

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = cz$$

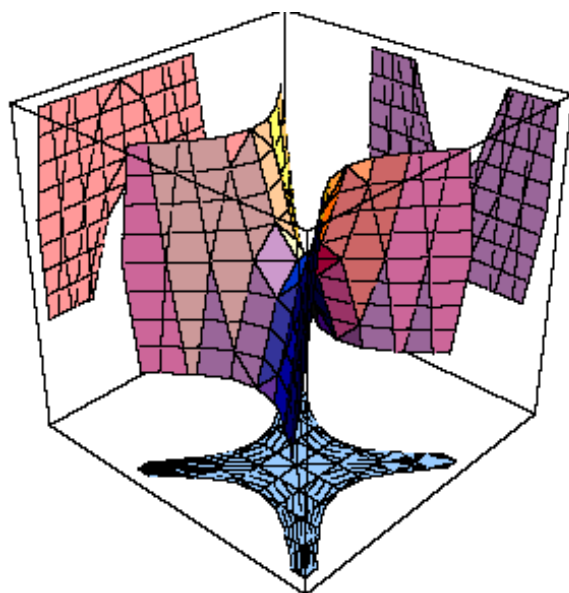
temos

- Secções paralelas ao plano XY: duas linhas concorrentes na origem, caso contrário hipérbolas
 - Secções paralelas ao plano XZ: parábolas
 - Secções paralelas ao plano YZ: parábolas
 - O ponto $P_0(0, 0, 0)$ é chamado ponto de sela ou ponto de minimax da superfície
 - As hipérbolas acima de XY abrem-se na direção de y e abaixo de XY abrem-se na direção de x.
- Superfície





Na figura a seguir vemos as projeções nos planos coordenados



1.12 Quarta lista de exercícios

1) Identificar as quádricas representadas pelas equações

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------|
| a) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ | g) $4x^2 - y^2 = z$ |
| b) $2x^2 + 4y^2 + z^2 - 16 = 0$ | h) $z^2 = x^2 + y^2$ |
| c) $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 8$ | i) $z = x^2 + y^2$ |
| d) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ | j) $-2x^2 + 4y^2 + z^2 = 0$ |
| e) $-4x^2 - 4y^2 + z^2 = 4$ | k) $16x^2 - 9y^2 - z^2 = 144$ |
| f) $x^2 + z^2 + 4z = 0$ | l) $4x^2 + 9y^2 = 36z$ |

2) Identificar e construir o gráfico da quádrica representada pelas equações

- | | |
|-------------------------------|---------------------------|
| a) $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36$ | f) $y^2 = x^2 + z^2$ |
| b) $36x^2 + 9y^2 - 4z^2 = 36$ | g) $x^2 - y^2 + 2z^2 = 4$ |
| c) $x^2 + y^2 - 9z = 0$ | h) $x^2 + 4z^2 - 8y = 0$ |
| d) $4x^2 - 9y^2 - 36z = 0$ | i) $x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$ |
| e) $x^2 - y^2 + 2z^2 = 4$ | j) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ |

3) Quais das seguintes superfícies de revolução são quádricas? Cite o nome da quádrica resultante.

- a) Rotação da curva $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ em torno do eixo y
- b) Rotação da curva $y = x$ em torno do eixo x
- c) Rotação da curva $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ em torno do eixo x
- d) Rotação da curva $y = 1 + \cos x$ em torno do eixo x
- e) Rotação da curva $\frac{x^2}{4} + \frac{y}{9} = 1$ em torno do eixo x

1.13 Sistema de Coordenadas

1.13.1 Sistema de coordenadas cartesianas

No sistema de coordenadas cartesianas são usados três eixos de referência perpendiculares entre si, chamados eixos x , y e z .

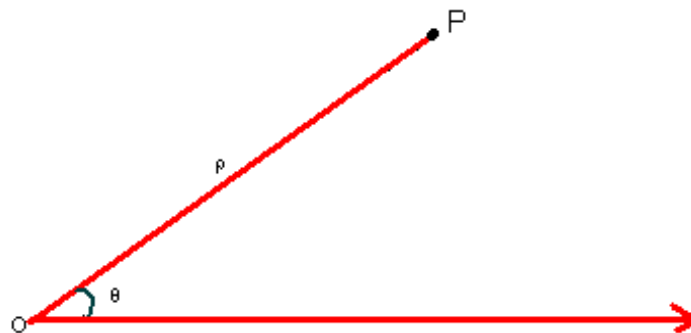
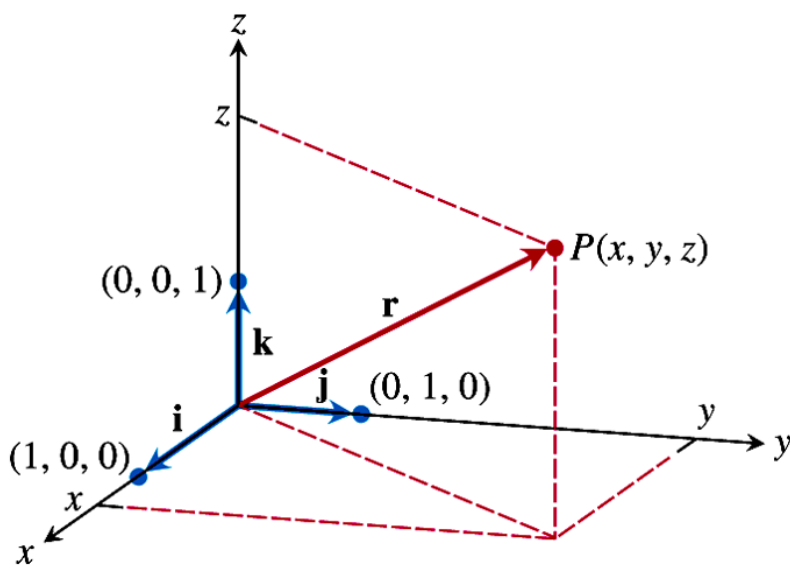


Figura 1.4:



Um ponto no sistema cartesiano será dado por $P(x, y, z)$ onde x será a projeção ortogonal do ponto no eixo x , y a projeção ortogonal no eixo y e z a projeção ortogonal no eixo z .

1.13.2 Sistema de coordenadas polares

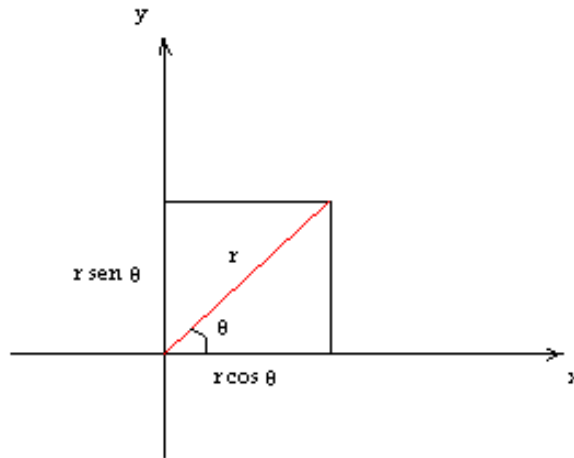
Coordenadas polares: O Sistema de coordenadas polares usa como referência uma segmento de reta chamado raio e denotado por r (usa-se denotar também por ρ) e um ângulo que o raio faz com uma semi-reta fixada a partir de um ponto chamado origem do sistema, denotado por O :

Um ponto no sistema de coordenadas polares será dado por $P(r, \theta)$ onde r é o comprimento do raio e θ é o ângulo que o raio θ faz com o semi-eixo horizontal.

Exemplo 50 : Marque os pontos $P(3, \frac{\pi}{3})$ e $P(1, \frac{\pi}{2})$

Relação entre coordenadas polares e coordenadas cartesianas

Para obtermos a relação entre as coordenadas polares e as coordenadas cartesianas fazemos a origem dos dois sistemas coincidir e o semi-eixo horizontal das coordenadas polares coincidir como o eixo positivo dos x no sistema cartesiano



Usando trigonometria podemos observar que:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

Portanto se temos um ponto em coordenadas polares usamos as relações acima para obter o mesmo ponto em coordenadas cartesianas:

Se tivermos um ponto em coordenadas cartesianas $P(x, y)$ obtemos o mesmo ponto em coordenadas polares através das relações:

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

Exemplo 51 : Dado o ponto $P(3, \frac{\pi}{4})$ obter este ponto em coordenadas cartesianas:

Usando as relações acima vemos que: $3 \sin \frac{\pi}{4} = 2.1213$

$$x = 3 \cos \frac{\pi}{4} = 2.1213$$

$$y = 3 \sin \frac{\pi}{4} = 2.1213$$

Portanto em coordenadas cartesianas temos o ponto $P(2.1213, 2.1213)$

Exemplo 52 : Dado o ponto $P(4, 2)$ obter este ponto em coordenadas polares:

Usando as relações acima vemos que: $r = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4.4721$

$$r = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4.4721$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{2}{4}\right) = 0.46365 \text{ rad}$$

Portanto em coordenadas polares temos o ponto $P(4.4721, 0.46365)$.

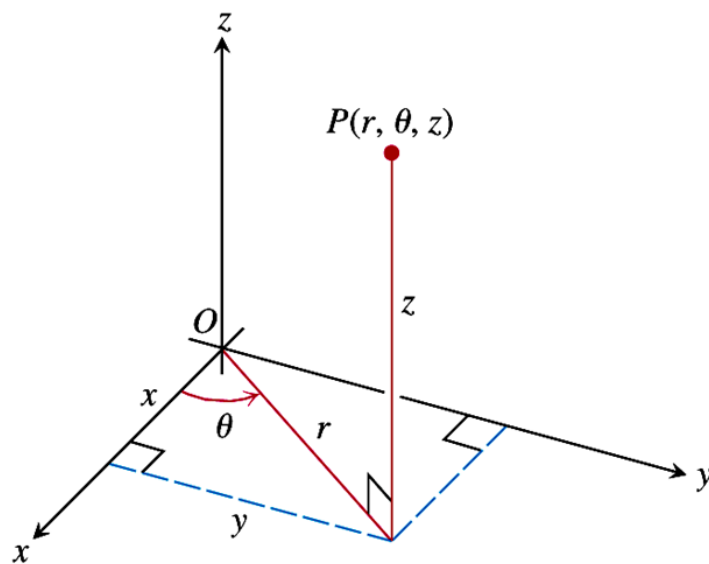
1.13.3 Sistema de coordenadas cilíndricas

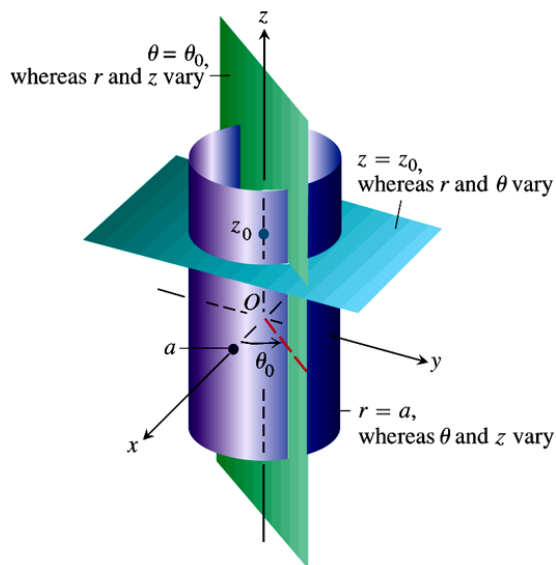
No sistema de coordenadas cilíndricas um ponto P é representado por uma tripla (r, θ, z) , onde (r, θ) representa um ponto em coordenadas polares e z é a terceira coordenada usual do sistema cartesiano. Para converter do sistema de coordenadas cilíndricas para o sistema cartesiano usamos as relações:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = z$$

Para passar do sistema de coordenadas cartesianas para o sistema de coordenadas cilíndricas usamos as relações:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad z = z$$





1.13.4 Coordenadas Esféricas

As coordenadas esféricas denotadas pela tripla ordenada (ρ, θ, ϕ) localizam um ponto P no espaço dando a distância ρ da origem, o ângulo θ projetado sobre o plano xy (o ângulo polar) e o ângulo ϕ que o raio ρ faz com o eixo positivo z (o ângulo vertical).

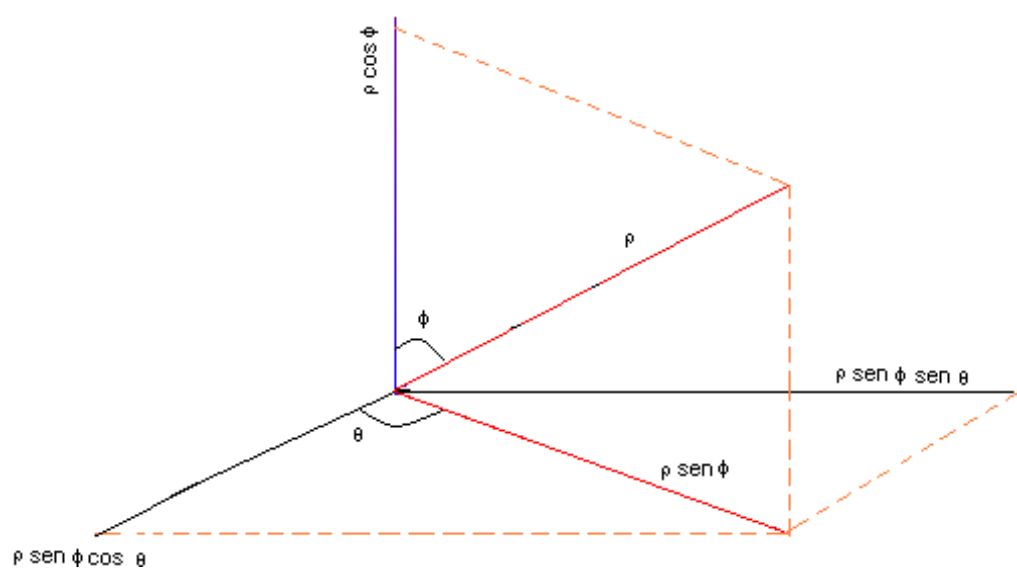
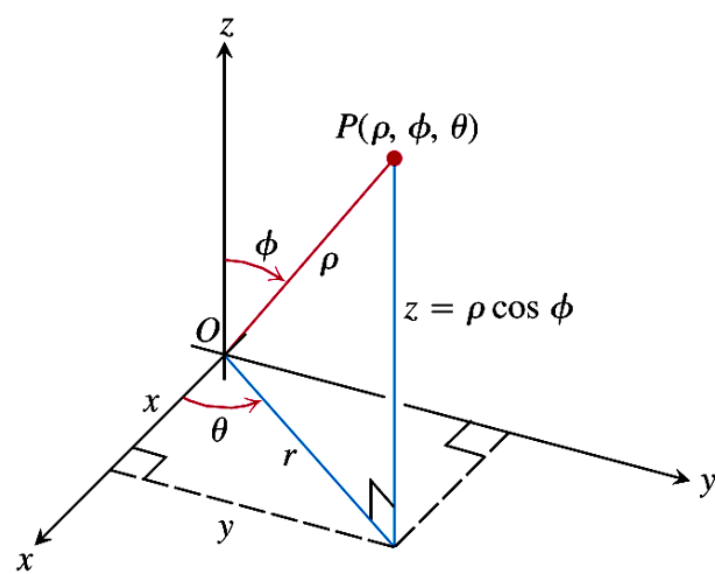
Para converter um ponto em coordenadas esféricas $P(\rho, \theta, \phi)$ para coordenadas cartesianas usamos as relações:

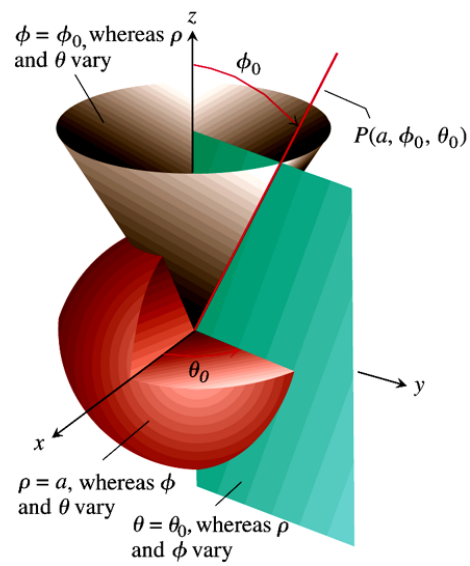
$$x = \rho \sin \phi \cos \theta \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta \quad z = \rho \cos \phi$$

Para converter um ponto $P(x, y, z)$ em coordenadas cartesianas para coordenadas polares usamos as relações:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \phi &= \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \end{aligned}$$

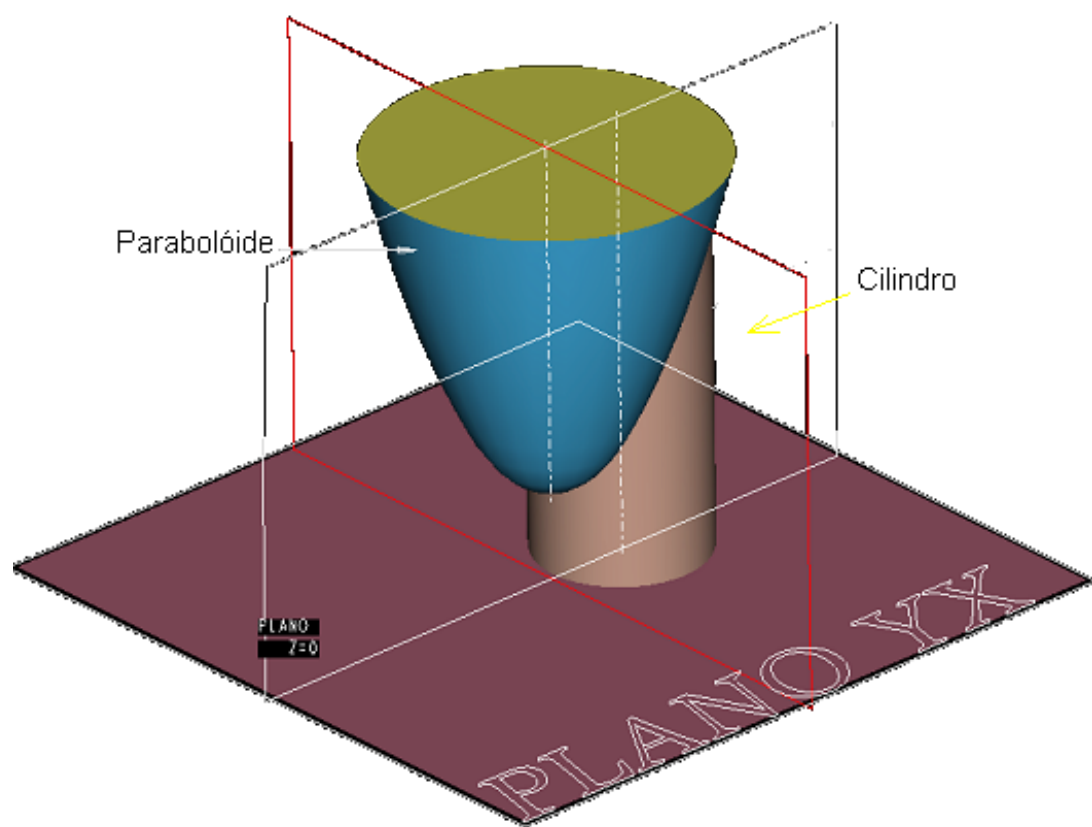
Geometricamente

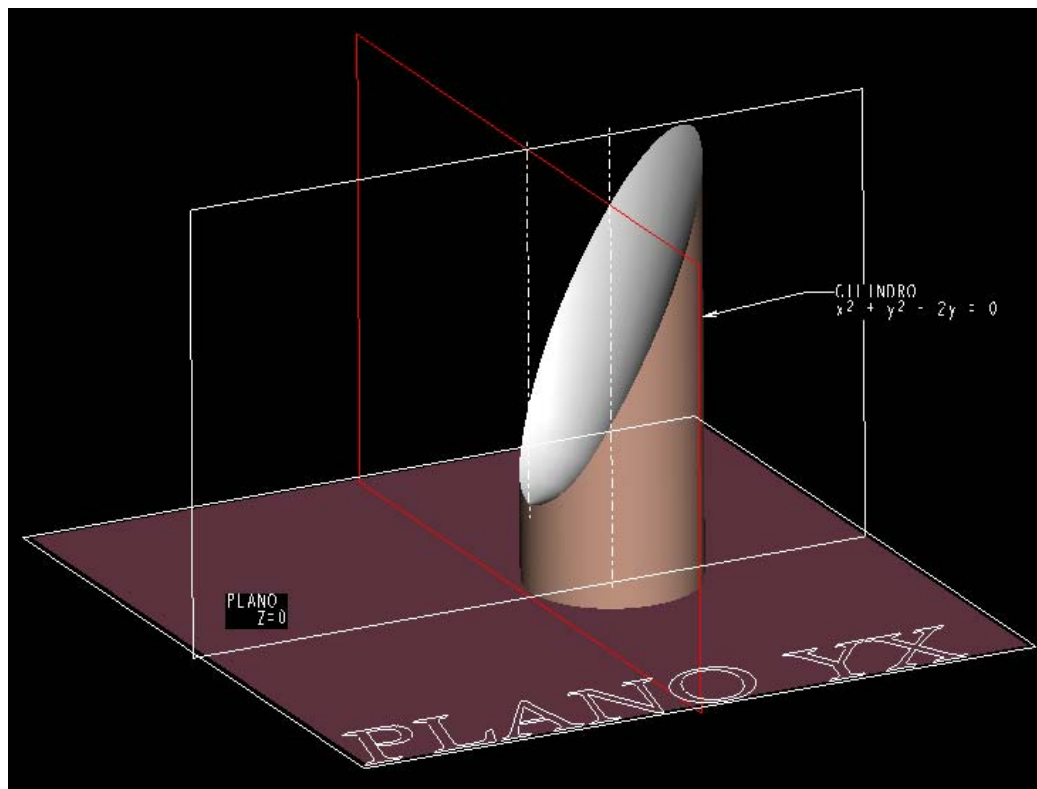


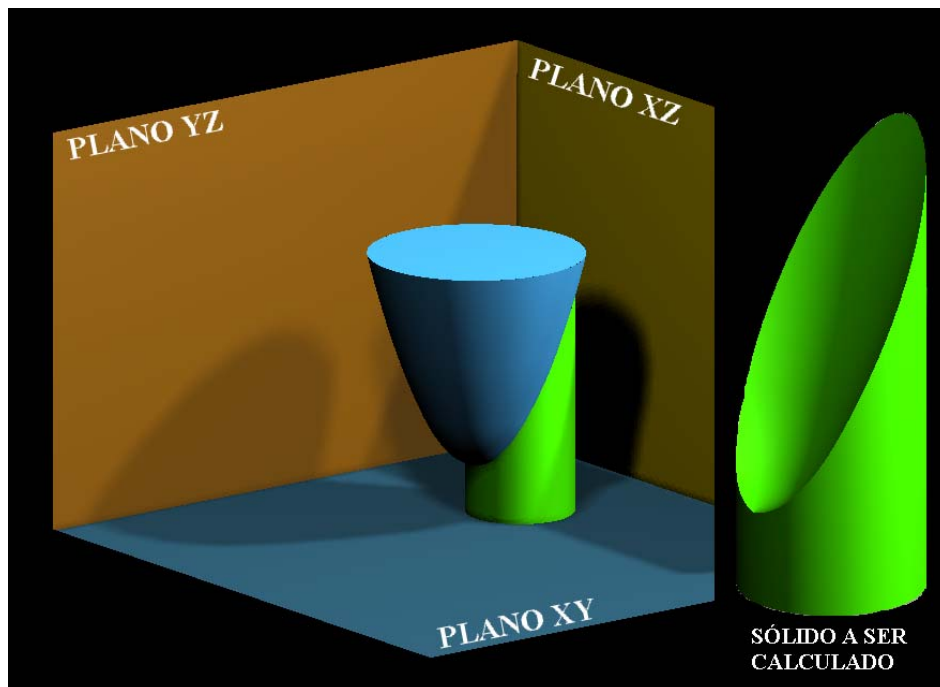


1.13.5 Construção de volumes

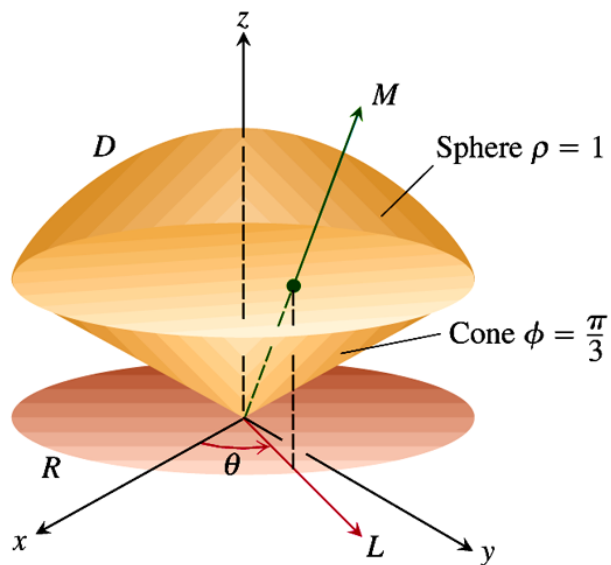
Exemplo 53 *Desenhar o volume do sólido delimitado superiormente pelo parabolóide $y^2 + x^2 + 1 - z = 0$, inferiormente pelo plano $z = 0$, e lateralmente pelo cilindro $x^2 + y^2 - 2y = 0$.*



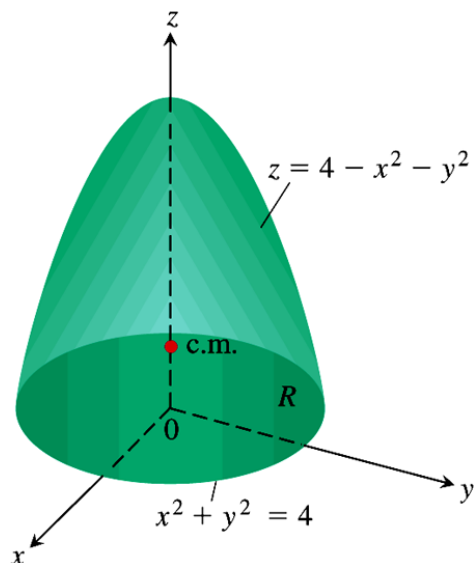




Exemplo 54 : *Desenhar o volume do sólido delimitado inferiormente pelo cone $\phi = \frac{\pi}{3}$ e superiormente pela esfera $\rho = 1$.*



Exemplo 55 : Desenhar o volume do sólido delimitado pelo parabolóide $z + x^2 + y^2 = 4$ e inferiormente pelo plano $z = 0$.



1.14 Quinta lista de exercícios

1) Construir o volume do sólido delimitado pelas superfícies

$$z = y^2, x = 0, x = 1, y = -1, y = 1 \text{ e } z = -2$$

2) Construir o volume do sólido delimitado superiormente por $z = 4 - x - y$,

$$x = 0, x = 2, y = 0, y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \text{ e } z = 0$$

3) Construir o volume do tetraedro delimitado pelos planos coordenados e pelo plano $x + \frac{y}{2} + z = 4$

4) Construir o volume do sólido delimitado pelas superfícies

$$y = 0, y = 1 - x^2 \text{ e } x^2 + z = 1 \text{ e } z = 0.$$

5) Construir o volume do sólido, no primeiro octante, delimitado por $x = 4 - y^2, y = z, x = 0, z = 0$

6) Construir o volume do sólido, no primeiro octante, delimitado por $y + x = 2$ e $z = x^2 + y^2$

7) Construir o volume do sólido delimitado pelas superfícies

$$z = 16 - x^2 - y^2, z = 0, y^2 + x^2 = 2\sqrt{y^2 + x^2} + x.$$

8) Construir o volume do sólido limitado acima pelo cilindro $z = 4 - x^2$, lateralmente pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e inferiormente por $z = 0$

9) Construir o volume do sólido, no primeiro octante, delimitado por $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + z^2 = 1$.

10) Construir o volume do sólido delimitado pelas superfícies

$$y^2 + x^2 + z = 12 \text{ e } 3x^2 + 5y^2 - z = 0.$$

- 11)** Construir o volume do sólido delimitado pelas superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x^2 + y^2 = 9$.
- 12)** Construir o volume do sólido delimitado pelas superfícies $z = 4 - x^2$ e $z = 3x^2 + y^2$.
- 13)** Construa o volume da porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4y$.
- 14)** Calcular o volume do sólido, no primeiro octante, delimitado por $y = x^2$ e $x = y^2$.
- 15)** Construir o volume do sólido delimitado pelas superfícies $x^2 + y^2 = 4$ e $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$.
- 16)** Construir o volume do sólido delimitado pelas superfícies $\rho = 4\cos\theta$, $z = 0$ e $\rho^2 = 16 - z^2$.
- 17)** Construir o volume do sólido delimitado por $z = 4x^2 + y^2$ e $z = 8 - 4x^2 - y^2$.
- 18)** Construir o volume interno a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e externo ao parabolóide $x^2 + y^2 = 3z$.
- 19)** Construir o volume acima do plano xy , limitado pelo parabolóide $z = x^2 + 4y^2$ e pelo cilindro $x^2 + 4y^2 = 4$.
- 20)** Construir o volume de $x = y^2$, $z = x$, $z = 0$ e $x = 1$.
- 21)** Construir o volume que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ acima do plano $z = 0$ e abaixo do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.
- 22)** Construir o volume delimitado por $z^2 + x^2 + y^2 = 4$, $z^2 - x^2 - y^2 = 0$ e $z^2 - \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 0$ nos pontos em que $z > 0$.
- 23)** Construir o volume do sólido delimitado pelas superfícies $z = x^2$, $z = 8 - x^2$, $y = 0$ e $z + y = 9$.
- 24)** Construir o volume do sólido delimitado pelas superfícies $z = 0$ e $z = 5(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16})^2 = \frac{2xy}{4}$.

Capítulo 2

MATRIZES E SISTEMAS

2.1 Tipos de matrizes

Definição: Chama-se matriz de ordem $m \times n$ a uma tabela de $m \cdot n$ elementos dispostos em m linhas e n colunas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Notação: Costumamos denotar as matrizes por letras latinas maiúsculas: $A, B, C, \dots$

Matriz coluna: É a matriz de ordem $m \times 1$.

$$A = [1]_{1 \times 1}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{4 \times 1}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ 999 \\ 1000 \end{bmatrix}_{1000 \times 1}$$

Matriz linha: É a matriz de ordem $1 \times n$.

Exemplo 56 :

$$A = [1]_{1 \times 1}, \quad D = [-1 \quad -2 \quad -3 \quad -4 \quad -5 \quad -6 \quad -7 \quad -10]_{1 \times 8}$$

Matriz nula: É a matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ onde $a_{ij} = 0$, para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Exemplo 57 :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N = [0]$$

Observação: Denotaremos freqüentemente a matriz nula por $\mathbf{0}$.

Matriz quadrada: É a matriz de ordem $n \times n$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Os elementos da forma a_{ii} constituem a diagonal principal

Os elementos a_{ij} em que $i + j = n + 1$ constituem a diagonal secundária.

Exemplo 58 : $A = [0]_{1 \times 1}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

Matriz diagonal: Matriz diagonal é a matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ onde $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Notação: $\text{diag}(A) = \{a_{11}, \dots, a_{nn}\}$

Exemplo 59 : $A = [0]_{1 \times 1}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Matriz identidade: É a matriz diagonal I onde $\text{diag}(I) = \{1, \dots, 1\}$.

Notação: I_n representa a matriz identidade de ordem n .

Exemplo 60 :

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_{100} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz transposta: Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, podemos obter uma outra matriz $A^T = [b_{ij}]_{n \times m}$, cujas linhas são as colunas de A , isto é, $b_{ij} = a_{ji}$. A^T é denominada a transposta de A .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

Exemplo 61 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 11 & 21 & 31 & 41 \\ 2 & 12 & 22 & 32 & 42 \\ 3 & 13 & 23 & 33 & 43 \\ 4 & 14 & 24 & 34 & 44 \\ 5 & 15 & 25 & 35 & 45 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}_{1 \times 6} \Rightarrow D^T = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \\ -5 \\ -6 \end{bmatrix}_{6 \times 1}$$

Matriz simétrica: Uma matriz quadrada $S = [a_{ij}]$ é simétrica se $S^T = S$

Exemplo 62 :

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 5 & 3 & 8 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz anti-simétrica: Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é anti-simétrica se $A^T = -A$.

Exemplo 63 : $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & -6 \\ -4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

Matriz triangular superior: A matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ que tem os elementos $a_{ij} = 0$ para $i > j$ é chamada matriz triangular superior.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 & 9 \\ 0 & 3 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_{10000}$$

Matriz triangular inferior: A matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ que tem os elementos $a_{ij} = 0$ para $i < j$ é chamada matriz triangular inferior.

Exemplo 64 :

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & -2 & 0 \\ 9 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2.2 Operações com matrizes

Adição: Dados $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ definimos $A + B$ por,

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

Propriedades:

- i) $A + B = B + A$
- ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$
- iii) $A + \mathbf{0} = A$

Multiplicação por escalar: Seja $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e k um número real definimos $k \cdot A$ por

$$kA = [k \cdot a_{ij}]_{m \times n}$$

Exemplo 65 : $-2 \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -20 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

Propriedades:

- i) $k(A + B) = kA + kB$
- ii) $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$
- iii) $0 \cdot A = \mathbf{0}$
- iv) $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$

Multiplicação de Matrizes: Sejam $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n \times p}$, definimos $A \cdot B$ por $AB = [c_{ij}]_{m \times p}$, onde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

Observe que o número de colunas de A deve ser igual ao número de linhas de B .

Exemplo 66 :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 \\ 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 \\ 5 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 5 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Propriedades:

- | | |
|---------------------------|-----------------------|
| i) $AI = IA = A$ | i v) $(AB)C = A(BC)$ |
| ii) $A(B + C) = AB + AC$ | v) $(AB)^T = B^T A^T$ |
| iii) $(A + B)C = AC + BC$ | vi) $0A = A0 = 0$ |

Propriedades da matriz transposta

- i) $(A + B)^T = A^T + B^T$
- ii) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$, onde λ é um número real
- iii) $(A^T)^T = A$
- iv) $(AB)^T = B^T A^T$

Matriz inversa: Dada uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, se existir uma matriz B que satisfaça $AB = BA = I$ diz-se que B é a inversa de A e denota-se B por A^{-1} , ou seja, $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

Exemplo 67 :

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}.$$

Dizemos que uma matriz A é inversível (não singular) se existe a matriz inversa A^{-1} , caso contrário dizemos que a matriz A é não inversível (singular).

Algumas propriedades importantes:

i) A é não singular se o determinante de A é diferente de zero. A é singular se determinante de A é igual a zero.

ii) Se A admite inversa ($\det A \neq 0$) esta é única

iii) Se A é não singular, sua inversa A^{-1} também é, isto é, se $\det A \neq 0$ então $\det A^{-1} \neq 0$. A matriz inversa de A^{-1} é A .

iv) A matriz identidade I é não singular (pois $\det I = 1$) e $I^{-1} = I$

v) Se a matriz A é não singular, sua transposta A^T também é. A matriz inversa de A^T é $(A^{-1})^T$, isto é, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, daí concluímos que se $\det A \neq 0$ então $\det A^T \neq 0$.

vi) Se as matrizes A e B são não singulares e de mesma ordem, o produto AB é uma matriz não singular. Vale a relação $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Exemplo 68 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = -2 \Rightarrow A \text{ é não singular}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow B \text{ é singular}$$

Matriz ortogonal: Uma matriz M , quadrada, cuja inversa coincide com sua transposta é denominada matriz ortogonal. Portanto M é ortogonal se $M^{-1} = M^T$, ou seja,

$$MM^T = M^T M = I$$

Exemplo 69 : $M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix},$

Potência de uma matriz: Dada uma matriz quadrada A a matriz $A^p = A \cdot A \cdot \dots \cdot A$ é chamada potência p de A .
p vezes

Exemplo 70 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 16 & 17 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 41 & 42 \\ 84 & 83 \end{bmatrix}$$

2.3 Matriz escalonada

Definição: Uma matriz $m \times n$ é linha reduzida à forma escada, ou escalonada, se:

- O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1.
- Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero.
- Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas (isto é, daquelas que possuem pelo menos um elemento não nulo)
- Se as linhas $1, \dots, p$ são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i , então $k_1 < k_2 < \dots < k_n$.

Exemplo 71 :

- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ não é forma escada. Não vale b).
- $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ não é forma escada. Não vale a) e b).
- $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ não é forma escada. Não vale c).
- $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é forma escada.

Operações elementares linha: São três as operações elementares sobre as linhas de uma matriz.

- 1º) Permuta da i - ésima e j - ésima linha ($L_i \leftrightarrow L_j$).

Exemplo 72 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

2º) Multiplicação da i -ésima linha por um escalar não nulo k ($L_i \rightarrow kL_i$).

Exemplo 73 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} L_2 \longrightarrow -3L_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -12 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

3º) Substituição da i -ésima linha pela i -ésima linha mais k vezes a j -ésima linha ($L_i \rightarrow L_i + kL_j$)

Exemplo 74 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} L_3 \longrightarrow L_3 + 2L_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Se A e B são matrizes $m \times n$, dizemos que B é *linha equivalente* a A , se B for obtida de A através de um número finito de operações elementares sobre as linhas de A . Notação $A \sim B$.

Exemplo 75 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \text{ é linha equivalente a } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ pois,}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} L_2 \rightarrow L_2 - 4L_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} L_3 \rightarrow L_3 + 3L_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$L_2 \rightarrow -L_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} L_3 \rightarrow L_3 - 4L_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema: Toda matriz A de ordem $m \times n$ é linha equivalente a uma única matriz linha-reduzida à forma escada.

Exemplo 76 : Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

obtenha uma única matriz B na forma escada linha equivalente a matriz A .

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} L_1 \rightarrow \frac{1}{2}L_1 \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} L_2 \rightarrow L_2 - 4L_1 \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1 \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{13}{2} \end{bmatrix} L_2 \rightarrow \frac{1}{3}L_2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{13}{2} \end{bmatrix} L_3 \rightarrow L_3 +$$

$$\frac{1}{2}L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{2} \end{bmatrix} L_3 \rightarrow -\frac{2}{13}L_3 \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} L_1 \rightarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \rightarrow L_1 - \frac{3}{2}L_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 77 Dada a matriz A obtenha uma matriz na forma escada equivalente a matriz dada.

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Posto de uma matriz: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, seja $B_{m \times n}$ a matriz linha reduzida à forma escada, linha equivalente à matriz A . O *posto* de A , denotado por p , é o número de linhas não nulas de B e a *nulidade* de A é $n - p$, onde n é o número de colunas de A e p é o posto de A .

Exemplo 78 : Encontrar o posto e a nulidade das matrizes:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Solução: A matriz } A \text{ é linha equivalente a matriz } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix}$$

portanto o posto de A é 3 (o número de linhas não nulas da matriz B) e a nulidade é $n - p = 4 - 3 = 1$ (n é o número de colunas da matriz A e p é o posto de A)

$$\text{b) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{14}{9} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução: posto $A = 2$ e nulidade de A é $3 - 2 = 1$

$$\text{c) } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{43}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solução posto de $A = 3$ e nulidade de A é 0

2.4 Cálculo da inversa

Cálculo da inversa por escalonamento: Para se determinar a matriz inversa de uma matriz A , não singular, através de operações elementares entre as linhas da matriz fazemos o seguinte:

a) Coloca-se ao lado da matriz A a matriz I , separada por um traço vertical tracejado.

b) Transforma-se por meio de operações elementares a matriz A na matriz I , aplicando-simultaneamente à matriz I colocada ao lado da matriz A , as mesmas operações elementares aplicadas à matriz A .

Exemplo 79 : Calcular inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ por escalonamento.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} L_1 \rightarrow \frac{1}{2}L_1 \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} L_2 \rightarrow L_2 - 4L_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} L_1 \rightarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

2.5 Determinantes

Definição: Determinante de uma matriz A é um número real associado à matriz A . Notação: $\det A$.

Denotamos também o determinante da matriz A ,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n-1n} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

por

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n-1n} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Propriedades do determinante:

- 1) $\det A = \det A^T$
- 2) $\det(AB) = \det A \det B$
- 3) Se a matriz A possui uma linha ou coluna nula então $\det A = 0$
- 4) Se a matriz A tem duas linhas ou colunas iguais então $\det A = 0$

5) Se na matriz A uma linha (ou coluna) é múltipla de outra linha (coluna) então $\det A = 0$

6) Trocando a posição de duas linhas (colunas) o determinante muda de sinal

7) Quando se multiplica uma linha (coluna) de uma matriz A por um número $k \neq 0$ o determinante fica multiplicado por esse mesmo número.

8) O determinante de uma matriz A não se altera quando se faz a seguinte operação entre linha: $L_i \rightarrow L_i + kL_j$.

9) O determinante de uma matriz triangular superior (ou inferior) é igual ao produto dos elementos da diagonal.

10) A partir de $\det(AB) = \det A \det B$ temos

$$\det(AA^{-1}) = \det I \Rightarrow \det A \det A^{-1} = 1 \Rightarrow \det A = \frac{1}{\det A^{-1}}$$

Cálculo do determinante por triangulação. Para se calcular o determinante de uma matriz A usamos as operações elementares linha de modo a obter uma matriz triangular superior (ou inferior) observando as propriedades do determinante e fazendo as compensações necessárias.

Exemplo 80 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2 \longleftrightarrow L_3} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (L_2 \longleftrightarrow L_3 \text{ (Quando permutamos as linhas o determinante troca de sinal)})$$

$$(-1) \det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow \frac{1}{2}L_1} \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \rightarrow \frac{1}{2}L_1 \text{ (Quando multiplicamos uma linha por um número o det. fica multiplicado pelo mesmo número)})$$

$$\frac{1}{2}(-1) \det A = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 \rightarrow L_2 + (-3)L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \quad (L_2 \rightarrow L_2 + (-3)L_1 \text{ (Esta operação não altera o determinante)})$$

$$\frac{1}{2}(-1) \det A = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 2L_2} \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_3 \rightarrow L_3 - 2L_2 \text{ (Esta operação não altera o determinante)})$$

$$\frac{1}{2}(-1) \det A = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{O determinante de uma matriz triangular superior é o produto dos elementos da diagonal principal})$$

$$\frac{1}{2}(-1) \det A = \frac{1}{2} \Rightarrow \det A = -1$$

Cálculo do determinante por desenvolvimento de Laplace:

Regra de Chió

Se a matriz A é de ordem 2×2 então:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\det \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 5 * 3 - 2 * 1 = 13$$

Regra de Sarrus

Se A é 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccccccc} & a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\ & & \searrow & & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & \\ a_{21} & & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\ & a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32} \end{array}$$

$$\det A = (a_{11}a_{22}a_{33}) + (a_{12}a_{23}a_{31}) + (a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13}) - (a_{32}a_{23}a_{11}) - (a_{33}a_{21}a_{12})$$

Desenvolvimento de Laplace

Para uma matriz de ordem $n \times n$ usamos o desenvolvimento de Laplace que é dado pela fórmula.

$$\det A_{n \times n} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

onde A_{ij} é a submatriz obtida a partir da matriz A eliminando-se a i -ésima linha e a j -ésima coluna da matriz A . Se chamarmos $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ então

$$\det A_{n \times n} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta_{ij}$$

Exemplo 81 :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos calcular o determinante da matriz fazendo o desenvolvimento pela primeira linha (note que seria mais conveniente desenvolver pela segunda linha, pois ela possui dois elementos nulos).

$$\det A = -1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ 3(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} + (-4)(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\det A = (-1)(1)(-6) + 2(-1)(-12) + (3)(1)(10) + (-4)(-1)(78)$$

$$\det A = 372.$$

2.6 Sexta lista de exercícios

1) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determine o valor de x para que A seja uma matriz simétrica

2) Mostre que toda matriz quadrada A pode ser escrita como a soma de uma matriz simétrica com uma matriz anti-simétrica, ou seja, $A = S + N$ onde S é uma matriz simétrica e N é uma matriz anti-simétrica. Sugestão: Determine S e N em função da matriz A .

3) Suponha que $A \neq 0$ e $AB = AC$ onde A, B, C são matrizes tais que a multiplicação esteja definida. Pergunta-se:

a) $B = C$?

b) Se existir uma matriz Y , tal que $YA = I$, onde I é a matriz identidade, então $B = C$?

4) Mostre que a matriz

$$M = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma matriz ortogonal

5) Sejam P e Q matrizes ortogonais de mesma ordem.

a) PQ é uma matriz ortogonal? Justifique sua resposta.

b) Quais os valores que $\det Q$ pode ter?

6) Dada uma matriz A de ordem $m \times n$ mostre que a matriz AA^T é uma matriz simétrica de ordem $m \times m$. A matriz $A^T A$ é simétrica? Qual sua ordem?

7) Um construtor tem contrato,s para construir 3 estilos de casa: moderno, mediterrâneo e colonial. A quantidade empregada em cada tipo de casa é dada pela matriz

	<i>Ferro</i>	<i>Madeira</i>	<i>Vidro</i>	<i>Tinta</i>	<i>Tijolo</i>
<i>Moderno</i>	5	20	16	7	17
<i>Mediterrâneo</i>	7	18	12	9	21
<i>Colonial</i>	6	25	8	5	13

a) Se ele vai construir 5,7 e 12 casas dos tipos moderno, mediterrâneo e colonial, respectivamente, quantas unidades de cada material serão empregadas?

b) Suponha agora que os preços por unidade de ferro, madeira, vidro, tinta e tijolo sejam respectivamente, 15, 8, 5, 1 e 10 reais. Qual o preço unitário de cada tipo de casa?

c) Qual o custo total do material empregado?

8) Calcule o determinante de A onde

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & \pi & -5 & 0 & 0 \\ 4 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{9)} \text{ Mostre que } \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

10) Encontre A^{-1} , onde

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & x^2 \\ 2 & 2 & x^2 \end{bmatrix}$$

11) Encontre os valores de k para os quais a matriz

$$A = \begin{bmatrix} k-3 & 0 & 3 \\ 0 & k+2 & 0 \\ -5 & 0 & k+5 \end{bmatrix}$$

é não inversível.

12) Existe alguma matriz "inversível" X tal que $X^2 = 0$? Justifique sua resposta.

13) Dizemos que a matriz H é uma "inversa à direita" de $A_{m \times n}$ se, e somente se, $AH = I_m$. Encontre a inversa à direita de

$$A \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

14) Para a matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem n definida por $a_{ij} = i-j$, mostrar que

$$\det(A) = 1!2!3!4!\dots(n-1)!$$

15) Para a matriz $A = (a_{ij})$ de ordem 2 definida por $a_{ij} = i + j$, calcular $f(t) = \det(A - tI_2)$ e resolver a equação do segundo grau $f(t) = 0$.

16) Para a matriz definida por:

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

calcular $f(t) = \det(A - tI_2)$ e resolver a equação do segundo grau $f(t) = 0$.

2.7 Sistema de equações lineares

2.7.1 Introdução

Uma equação linear é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$$

na qual $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ são os respectivos coeficientes das variáveis $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ e b é o termo independente. Os números $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ e o termo independente b geralmente são números conhecidos e as variáveis $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são as incógnitas.

Os valores das variáveis que transformam uma equação linear em uma identidade, isto é, que satisfazem a equação, constituem sua solução. Esses valores são denominados raízes das equações lineares.

A um conjunto de equações lineares se dá o nome de sistema de equações lineares e tem a seguinte representação:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Os valores das variáveis que transformam simultaneamente as equações de um sistema de equações lineares em uma identidade, isto é, que satisfazem a equação constituem sua solução.

Diz-se que dois sistemas de equações lineares são **equivalentes** quando admitem a mesma solução.

Exemplo 82 *Os sistemas*

$$\begin{array}{lcl} 2x + 3y = 11 & e & 10x - 2y = 38 \\ -x + y = -3 & & -3x + 5y = -7 \end{array}$$

são equivalentes pois possuem as mesmas soluções, $x = 4$ e $y = 1$

Quanto as soluções, três casos podem ocorrer:

- 1) O sistema possui uma única solução. Neste caso dizemos que o sistema é compatível e determinado
- 2) O sistema possui infinitas soluções. Neste caso dizemos que o sistema é compatível e indeterminado.
- 3) O sistema não possui nenhuma solução. Neste caso dizemos que o sistema é incompatível.

2.7.2 Sistemas e matrizes.

Dado um sistema linear na forma,

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \quad (2.1)$$

podemos representá-lo matricialmente utilizando as notações da teoria de matrizes da seguinte maneira:

Se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

podemos escrever o sistema (2.1) na forma matricial:

$$AX = B$$

Ao sistema (2.1) associamos a seguinte matriz:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

que chamamos matriz ampliada do sistema.

Teorema: Dois sistemas que possuem matrizes ampliadas equivalentes são equivalentes.

Dada a matriz ampliada do sistema de equações lineares consideramos a matriz linha reduzida a forma escada obtida a partir da matriz ampliada do sistema:

Teorema:

- 1) Um sistema de m equações e n incógnitas admite solução se, e somente se, o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes.
- 2) Se as duas matrizes tem o mesmo posto p e $p = n$ (número de colunas da matriz dos coeficientes, ou números de variáveis) a solução é única.
- 3) Se as duas matrizes tem o mesmo posto e $p \neq n$ podemos escolher $n - p$ incógnitas e as outras incógnitas serão dadas em função destas. O número $n - p$ é chamado grau de liberdade do sistema.

Resumo: Dado um sistema de m equações e n incógnitas seja A_a a matriz ampliada do sistema e seja A_e a matriz linha equivalente a matriz A_a onde a matriz dos coeficientes estão na forma escada. Seja p_a o posto da matriz ampliada e p_c o posto da matriz dos coeficientes obtidos a partir da matriz A_e .

- Se $p_a \neq p_c$ então o sistema é incompatível (não possui solução)
- Se $p_a = p_c$ então o sistema é compatível (possui solução). Seja $p = p_a = p_c$, se $p = n$ então o sistema é compatível e determinado (possui uma única solução). Se $p < n$ o sistema é compatível e indeterminado (possui infinitas soluções). Sempre que um sistema possuir infinitas soluções deveremos

atribuir valores a algumas variáveis e determinar o valor das outras variáveis em função destas. O número de variáveis as quais deveremos atribuir valor é o grau de liberdade do sistema, dado pelo número $n - p$.

1) Classificar e resolver o sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= -12 \end{cases} \quad (2.2)$$

Solução:

Matriz Ampliada

$$A_a = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & -12 \end{array} \right]$$

Matriz linha equivalente a matriz ampliada, onde a parte da matriz dos coeficientes está na forma escada

$$A_e = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

De A_e obtemos: $p_c = 3$, $p_a = 3$ e $n = 3$.

$p = p_c = p_a = 3 \Rightarrow$ sistema compatível

$p = n \Rightarrow$ sistema compatível e determinado (possui uma única solução)

A matriz A_c é a matriz ampliada do seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Como sistemas equivalentes tem a mesma solução, a solução do sistema (2.2)

é

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -5$$

$$x_3 = 3$$

2) Classificar e resolver o sistema:

$$\begin{cases} 4y + 2x + 6z &= -6 \\ -4z - 2y + 3x &= -38 \\ x + 3z + 2y &= -3 \end{cases} \quad (2.3)$$

$$A_a = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & -6 \\ 3 & -2 & -4 & -38 \\ 1 & 2 & 3 & -3 \end{array} \right]$$

$$A_e = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{41}{4} \\ 0 & 1 & \frac{13}{8} & \frac{29}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Neste caso temos:

$$n = 3$$

$$p_a = 2$$

$$p_c = 2 \Rightarrow p = 2$$

$p < n \Rightarrow$ sistema compatível e indeterminado (infinitas soluções)

grau de liberdade = $n - p = 1$

O sistema (2.3) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}z = \frac{41}{2} \\ y + \frac{3}{4}z = \frac{-47}{4} \end{cases}$$

Para encontrar uma solução (note que existem infinitas soluções) devemos atribuir valor a uma das variáveis (pois o grau de liberdade é 1) e determinar as outras. Note que fica mais fácil se atribuirmos valor a variável z : Por exemplo fazendo $z = 0$ temos $x = \frac{41}{2}$ e $y = \frac{-47}{4}$ (Poderíamos atribuir outro valor qualquer a z , e para cada valor de z teremos os valores correspondentes de x e y , daí termos infinitas soluções)

3) Classificar e resolver o sistema:

$$\begin{cases} 6x - 4y - 2z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ 3x - 2y - z = 1 \end{cases}$$

$$A_a = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -4 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

$$A_e = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{10} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$

Neste caso:

$$n = 3$$

$$p_c = 2$$

$$p_a = 3 \Rightarrow p_a \neq p_c \Rightarrow \text{sistema incompatível (não possui solução)}$$

2.7.3 Solução de um sistema por matriz inversa

Usando a notação matricial para sistemas lineares temos

$$\begin{aligned} CX &= B \text{ (supondo que existe } C^{-1}) \\ C^{-1}CX &= C^{-1}B \text{ (observe que estamos multiplicando } C^{-1} \text{ pela esquerda)} \\ IX &= C^{-1}B \\ X &= C^{-1}B \end{aligned}$$

Logo para se determinar a solução basta multiplicar a matriz inversa dos coeficientes pela matriz dos termos independentes (pela esquerda, já que a multiplicação de matrizes não é comutativa). Se a matriz C não tem inversa então ou o sistema não possui solução ou possui infinitas soluções.

Exemplo 83 :

$$\begin{cases} -2x + 3y - z &= 1 \\ x - 3y + z &= 1 \\ -x + 2y - z &= 1 \end{cases}$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$CX = B$$

$$X = C^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.0 \\ -2.0 \\ -3.0 \end{bmatrix}$$

2.8 Sétima lista de exercícios

1) Resolva o sistema de equações, escrevendo a matriz ampliada do sistema inicial e escrevendo o sistema final do qual se obterá a solução do sistema original:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z &= 11 \\ 4x - 3y + 2z &= 0 \\ x + y + z &= 6 \\ 3x + y + z &= 4 \end{cases}$$

2) Reduza as matrizes à forma escada através de operações linhas:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

3) Determine k para que o sistema admita solução

$$\begin{cases} -4x + 3y &= 2 \\ 5x - 4y &= 0 \\ 2x - y &= k \end{cases}$$

4) Encontre todas as soluções do sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 7x_5 &= 14 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 - 2x_4 + 5x_5 &= -2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 &= -1 \end{cases}$$

5) Explique por que a nulidade de uma matriz nunca é negativa.

6) Chamamos de sistema homogêneo de n equações e m incógnitas aquele sistema cujos termos independentes são todos nulos.

a) Um sistema homogêneo admite pelo menos uma solução. Qual é ela?

b) Encontre os valores de $k \in \mathbb{R}$, tais que o sistema homogêneo

$$\begin{cases} 2x - 5y + 2z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ 2x + kz &= 0 \end{cases}$$

tenha uma solução distinta da solução trivial.

7) Podemos resolver um sistema usando matriz inversa da seguinte forma:

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}AX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

Isto é útil quando desejamos resolver vários sistemas lineares que possuem a mesma matriz dos coeficientes.

$$\text{Usando a teoria acima resolva os sistema } AX = B \text{ onde } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

e

$$\text{a) } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{c) } B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 100 \end{bmatrix} \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 1000 \\ 10 \\ 100 \end{bmatrix} \quad \text{e) } \begin{bmatrix} 111 \\ 311 \\ 511 \end{bmatrix}$$

8) Resolva o sistema $D^{-1}XY = B$ e encontre o vetor Y , onde X é solução da equação matricial $D^{-1}XD = A$ e

$$D = \text{diag}(1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix}$$

9) Classifique o sistema e exiba uma solução, caso ela exista:

$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z &= -6 \\ 3x - 2y - 4z &= -38 \\ x + 2y + 3z &= -3 \end{cases}$$

10) Uma editora publica um best-seller potencial com três encadernações diferentes: capa mole, capa dura e encadernação de luxo. cada exemplar necessita de um certo tempo para costura e cola conforme mostra a tabela abaixo:

	Costura	Cola
Capa Mole	1 min	2 min
Capa Dura	2 min	4 min
Luxo	3 min	5 min

Figura 2.1:

Se o local onde são feitas as costuras fica disponível 6 hora por dia e o local onde se cola, 11 hora por dia, quantos livros de cada tipo devem ser feitos por dia, de modo que os locais de trabalho sejam plenamente utilizados?

11) Num grande acampamento militar há 150 blindados dos tipos BM3, BM4 e BM5, isto é, equipados com 3, 4 e 5 canhões do tipo MX9 respectivamente. O total de canhões disponíveis é igual a 530. A soma dos BM4 com os BM5 corresponde aos 2 / 3 dos BM3. Se para o início de uma manobra militar, cada canhão carrega 12 projéteis, quantos projéteis serão necessários para o grupo dos BM4 no início da operação?

2.9 Apêndice

2.9.1 Cálculo da inversa por adjunta

Dada uma matriz , lembramos que o cofator d_{ij} do elemento a_{ij} da matriz A é o elemento $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$, onde A_{ij} é a submatriz de A obtida extraindo-se a i - ésima linha e a j - ésima coluna. Com estes cofatores forma-se uma nova matriz A , denominada matriz dos cofatores denotada por $\overline{A}$. Portanto

$$\overline{A} = [d_{ij}]$$

onde $d_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$

Exemplo 84 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = 2 \Rightarrow d_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} = 1 * (-19) = -19$$

$$a_{12} = 1 \Rightarrow d_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = -1 * (-19) = 19$$

$$a_{13} = 0 \Rightarrow d_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = 1 * (-19) = -19$$

$$a_{21} = -3 \Rightarrow d_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} = -1 * (5) = -5$$

$$\begin{aligned}
a_{22} = 1 &\Rightarrow d_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = 1 * (10) = 10 \\
a_{23} = 4 &\Rightarrow d_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = -1 * (11) = -11 \\
a_{31} = 1 &\Rightarrow d_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 1 * (4) = 4 \\
a_{32} = 6 &\Rightarrow d_{32} = (-1)^{3+2} \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = -1 * (8) = -8 \\
a_{33} = 5 &\Rightarrow d_{33} = (-1)^{3+3} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = 1 * (5) = 5 \\
\overline{A} &= \begin{bmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -5 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & 5 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Definição: Dada uma matriz quadrada A , chamaremos de *matriz adjunta* de A à transposta das matriz dos cofatores de A e denotaremos $\text{adj } A$. Portanto $\text{adj } A = \overline{A}^T$.

Teorema: Uma matriz quadrada A admite inversa se e somente se $\det A \neq 0$. Neste caso

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{adj } A)$$

2.9.2 Regra de Cramer

Um outro método de resolução de sistemas lineares de ordem $n \times n$ é a Regra de Cramer onde as soluções de sistema linear linear são calculadas usando o determinante. Justamente por usar o determinante este método torna-se inviável computacionalmente mas é bastante prático em certas questões teóricas.

$$\begin{array}{cccccc}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}$$

Na forma matricial este sistema é escrito da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Supondo que $\det C \neq 0$ e portanto que C tenha inversa C^{-1} obtemos

$$\begin{aligned}
CX &= B \\
C^{-1}CX &= C^{-1}B \text{ (observe que estamos multiplicando } C^{-1} \text{ pela esquerda)} \\
IX &= C^{-1}B \\
X &= C^{-1}B
\end{aligned}$$

usando a relação

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C}(\text{adj}C)$$

temos

$$\begin{aligned}
X &= \frac{1}{\det C}(\text{adj}C)B \\
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} &= \frac{1}{\det C} \text{adj} \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} &= \frac{1}{\det C} \left(\begin{bmatrix} D_{11} & Da_{12} & \cdots & Da_{1n} \\ Da_{21} & Da_{22} & \cdots & Da_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Da_{n1} & Da_{n2} & \cdots & Da_{nn} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} &= \frac{1}{\det C} \begin{bmatrix} b_1 D_{11} + & b_2 Da_{12} & + \cdots + & b_n Da_{1n} \\ b_1 Da_{21} + & b_2 Da_{22} & + \cdots + & b_n Da_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 Da_{n1} & b_2 Da_{n2} & \cdots & b_n Da_{nn} \end{bmatrix} \\
x_1 &= \frac{1}{\det C} (b_1 D_{11} + b_2 Da_{12} + \cdots + b_n Da_{1n}) \\
x_1 &= \frac{1}{\det C} \det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\
x_1 &= \frac{\det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}
\end{aligned}$$

Analogamente

$$x_i = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}$$

$i = 2, 3, \dots, n$

Podemos escrever esta relação na forma

$$x_i = \frac{D_i}{D}$$

onde

$$D_i = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

e

$$D = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Usando a Regra de Cramer podemos classificar um sistema $n \times n$:

Se $D \neq 0$ então o sistema possui uma única solução (compatível e determinado)

Se $D = 0$ e algum dos $D_i \neq 0$ então o sistema é incompatível

Se $D = 0$ e todos os $D_i = 0$, para $i = 1, \dots, n$ então o sistema possui infinitas soluções. Note que não podemos determinar o grau de liberdade pela Regra de Cramer.

Exemplo 85 Resolver o sistema

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 10x + 10y = 20 \end{cases}$$

$$D = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 10 \end{bmatrix} = 0$$

$$D_1 = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 20 & 10 \end{bmatrix} = 0$$

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 20 \end{bmatrix} = 0$$

Logo o sistema possui infinitas soluções.

Exemplo 86 *Resolver o sistema*

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 20x + 20y - 20z = 1 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$D = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 20 & 20 & -20 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$D_1 = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 20 & -20 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 20 & 0 & -20 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 20$$

$$D_3 = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 20 & 20 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -1$$

Como D_2 e $D_3 = -1$ o sistema é incompatível

Exemplo 87 *Resolva o sistema*

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$D = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -4$$

Logo o sistema tem uma única solução

$$D_1 = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -4$$

$$D_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

$$D_3 = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -2$$

A solução é

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{D_1}{D} = \frac{-4}{-4} = 1 \\ x_2 &= \frac{D_2}{D} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \\ x_3 &= \frac{D_3}{D} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exercício: Usando a Regra de Cramer faça a classificação de um sistema homogêneo $AX = 0$

Capítulo 3

ESPAÇOS VETORIAIS

3.1 Introdução

Produto de dez anos de intensa pesquisa e desenvolvimento, o primeiro ônibus espacial dos EUA (lançado em 1981) foi uma vitória da engenharia de controle de sistemas, envolvendo muitas áreas da engenharia - aeronáutica, química, elétrica, hidráulica e mecânica. Os sistemas de controle de ônibus espacial são absolutamente críticos para vôo. Ele requer um constante monitoramento por computador durante o vôo atmosférico. O sistema de vôo envia uma sequência de comandos para a superfície de controle aerodinâmico. Matematicamente, os sinais de entrada e saída de um sistema de Engenharia são funções. É importante para as aplicações que essas funções possam ser somadas e multiplicadas por escalares. Essas duas operações em funções tem propriedades algébricas que são completamente análogas às operações de soma de vetor e multiplicação de vetor por escalar no $\mathbb{R}^n$. Por esse motivo, o conjunto de todas as entradas possíveis (funções) é chamada de um **espaço vetorial**. A fundamentação matemática para a engenharia de sistemas repousa sobre espaços vetoriais de funções, portanto precisamos estender a teoria de vetores do $\mathbb{R}^n$ de modo a incluir tais funções.

Antes de apresentarmos a sua definição, analisaremos em paralelo dois objetos: o conjunto formado pelas funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, denotado por $F(\mathbb{R})$ e o conjunto das matrizes quadradas de ordem n com coeficientes reais que denotaremos por $M_n(\mathbb{R})$.

A soma de duas funções f e g de $F(\mathbb{R})$ é definida como:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Note também que se $\alpha \in \mathbb{R}$ podemos multiplicar o escalar α pela função f , da seguinte forma:

$$(\alpha f)(x) = \alpha(f(x))$$

resultando num elemento de $F(\mathbb{R})$.

Com relação a $M_n(\mathbb{R})$ podemos somar duas matrizes quadradas de ordem n ,

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{n \times n}$$

que é um elemento de M_n .

Com relação à multiplicação do escalar α pela matriz $A \in \mathbb{R}$

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})_{n \times n}$$

o qual também $\in M_n(\mathbb{R})$.

O que estes dois exemplos acima, com a adição de seus elementos e multiplicação de seus elementos por escalares, têm em comum?

Verifica-se facilmente a partir das propriedades dos números reais que, com relação a quaisquer funções f, g e h em $F(\mathbb{R})$ e para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, são válidos os seguintes resultados:

1. $f + g = g + h$
2. $f + (g + h) = (f + g) + h$
3. Se g representa a função nula então $f + g = f$
4. $f + (-f) = 0$
5. $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$
6. $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$
7. $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$
8. $1f = f$

Agora, com relação a quaisquer matrizes A, B , e C em M_n e para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, também são válidos os seguintes resultados:

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. Se 0 representa a matriz nula então $A + 0 = A$
4. $A + (-A) = 0$
5. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
7. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
8. $1A = A$

Observamos que o conjunto das funções bem como o das matrizes, quando munidos de soma e multiplicação por escalar, apresentam propriedades algébricas comuns. Existem muitos outros exemplos de conjuntos que apresentam as mesmas propriedades acima. Para não estudarmos separadamente cada conjunto, estudaremos um conjunto genérico e não vazio, V , sobre o qual supomos estar definidas as operações de adição e multiplicação por escalar.

Definição 88 *Um espaço vetorial V é um conjunto, cujos elementos são chamados vetores, no qual estão definidas duas operações: a adição, que a cada par de vetores, u e $v \in V$ faz corresponder um novo vetor denotado por $u + v \in V$, chamado a soma de u e v , e a multiplicação por um número real, que a cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e a cada vetor $v \in V$ faz corresponder um vetor denotado por αv , chamado produto de α por v . Estas operações devem satisfazer, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e u, v e $w \in V$ as seguintes propriedades:*

1. Comutatividade: $u + v = v + u$
2. Associatividade: $(u + v) + w = u + (v + w)$
3. Vetor nulo: existe um vetor nulo $0 \in V$ tal que $v + 0 = v$ para todo $v \in V$
4. Inverso aditivo: Para cada $v \in V$ existe $-v \in V$ tal que $-v + v = 0$
5. Distributividade: $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
6. $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
7. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
8. Multiplicação por 1: $1 \cdot u = u$

Exemplo 89 *Para todo número natural n , o símbolo $\mathbb{R}^n$ representa o espaço vetorial euclidiano n -dimensional. Os elementos de $\mathbb{R}^n$ são as listas ordenadas (chamadas n -uplas) $u = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, $v = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ de números reais. Por definição a igualdade vetorial $u = v$ significa as n igualdades numéricas*

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n.$$

Em $\mathbb{R}^n$ definimos as operações:

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

e

$$\alpha u = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

Verifica-se sem dificuldades, que estas definições fazem do $\mathbb{R}^n$ um E. V. (verifique).

Exemplo 90 O conjunto dos polinômios em x , de grau menor ou igual a n é definido por :

$$P_n = \{p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \mid a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}\}$$

com as operações de adição de polinômios e multiplicação de um polinômio por um escalar é um espaço vetorial. Note que cada elemento de P_n é uma função $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Exemplo 91 O conjunto das matrizes definido por

$$M(m, n) = \{A_{m \times n} = \{a_{ij}\} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m \text{ e } j = 1, \dots, n\}$$

com a soma usual de matrizes e multiplicação usual de um escalar por uma matriz é um espaço vetorial.

No caso particular das matrizes quadradas de ordem n denotaremos $M(n, n)$ por M_n .

Exemplo 92 Seja o conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ com as operações assim definidas:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, y)$$

O conjunto $\mathbb{R}^2$ com estas operações não é um espaço vetorial, de fato: Vamos mostrar que falha a propriedade 5) do E.V.

$$(\alpha + \beta)u = (\alpha + \beta)(x_1, y_1) = ((\alpha + \beta)x_1, y_1) = (\alpha x_1 + \beta x_1, y_1)$$

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta u &= \alpha(x_1, y_1) + \beta(x_1, y_1) = (\alpha x_1, y_1) + (\beta x_1, y_1) = (\alpha x_1 + \beta x_1, 2y_1) \\ &\Rightarrow (\alpha + \beta)u \neq \alpha u + \beta u \end{aligned}$$

3.2 Subespaços

Definição 93 Seja V um espaço vetorial. Dizemos que $W \subset V$ é um subespaço vetorial de V se forem satisfeitas as seguintes condições:

1. se $u, v \in W$ então $u + v \in W$
2. se $u \in W$ então $\alpha u \in W$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Podemos fazer três observações:

- as condições da definição garantem que ao operarmos em W (soma e multiplicação por escalar) não obteremos um vetor fora de W . Isto é suficiente para afirmar que W é ele próprio um E.V.
- Qualquer subespaço W de V precisa conter o vetor nulo.
- Todo espaço vetorial admite pelo menos dois subespaços: o conjunto formado pelo vetor nulo e o próprio E.V.

Exemplo 94 Seja $V = \mathbb{R}^5$ e $W = \{0, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, W é um subespaço vetorial?

Resolução:

verificamos as condições de subespaço: seja $u = (0, x_2, x_3, x_4, x_5) \in W$ e $v = (0, y_2, y_3, y_4, y_5) \in W$

1. $u + v = (0, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4, x_5 + y_5) \in W$
2. $\alpha u = \alpha(0, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4, \alpha x_5) \in W$

logo W é um subespaço vetorial.

Exemplo 95 Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$, S é um subespaço de $\mathbb{R}^3$?

Resolução:

Dados $u = (x_1, y_1, z_1) \in S$ e $v = (x_2, y_2, z_2) \in S$

1. $u + v = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

Como $u = (x_1, y_1, z_1) \in S \Rightarrow x_1 + y_1 + z_1 = 0$. Analogamente $x_2 + y_2 + z_2 = 0$, e podemos concluir que $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = 0 \Rightarrow u + v \in S$

2. $\alpha u = \alpha(x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$ para todo $\alpha \Rightarrow \alpha x_1 + \alpha y_1 + \alpha z_1 = \alpha(x_1 + y_1 + z_1) = \alpha 0 = 0$ e daí $\alpha u \in S$

Portanto, S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 96 $V = M_n$ e W é o subconjunto das matrizes triangulares superiores. W é subespaço de V , pois a soma das matrizes triangulares superiores ainda é uma matriz triangular superior, assim como o produto de uma matriz triangular por um escalar (Verifique).

Exemplo 97 Uma situação importante em que aparece um subespaço é obtida ao resolvermos um sistema linear homogêneo. Por exemplo:

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Observe que, se colocarmos este sistema na forma matricial, temos

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Desta forma, estamos procurando, dentro do E.V. $M(3,1)$ das matrizes colunas de 3 linhas, aqueles vetores que satisfazem a relação (3.2) isto é, aqueles vetores solução do sistema. Queremos saber se o conjunto dos vetores solução é subespaço de $M(3,1)$. Para isto, teremos que tomar dois vetores-solução:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

e verificar se sua soma ainda é um vetor-solução. Então:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \right] = \\ & \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

logo a soma é uma solução. Além disso, se multiplicarmos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$$

por uma constante α , teremos

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \left(\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \right) = \\ & \alpha \left[\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \right] = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

portanto, o conjunto W dos vetores-solução é subespaço vetorial de $M(3,1)$.

Exemplo 98 Seja $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \{(x, x^2), x \in \mathbb{R}\}$. Se escolhermos $u = (1, 1)$ e $v = (2, 4) \in W$, temos: $u + v = (3, 5) \notin W$, portanto W não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 99 Seja $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 2x\}$ W é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$, pois temos:

1. Para $u = (x_1, 2x_1)$ e $v = (x_2, 2y_2) \in W$ tem-se $u + v = (x_1 + x_2, 2(y_1 + y_2)) \in W$, pois a segunda componente de $u + v$ é igual ao dobro da primeira.
2. $\alpha u = \alpha(x_1, 2x_1) = (\alpha x_1, 2(\alpha x_1)) \in W$, pois a segunda componente de αu é igual ao dobro da primeira.

3.3 Intersecção de dois Subespaços Vetoriais

Definição 100 Dados W_1 e W_2 subespaços de um espaço vetorial V , a intersecção $W_1 \cap W_2$ ainda é um subespaço de V .

Exemplo 101 $V = \mathbb{R}^3$. Seja $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 0\}$ e $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0\}$. $W_1 \cap W_2$ é a reta de intersecção dos planos W_1 e W_2 , ou seja $W_1 \cap W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0 \text{ e } y = 0\}$

Exemplo 102 $V = \mathbb{R}^3$. Seja $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$ e $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$.

Para encontrarmos a intersecção dos dois subespaços devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

A solução desse sistema é $z = 0$, $y = -x$. Portanto $W_1 \cap W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0 \text{ e } y = -x\}$

Exemplo 103 $V = P_4$. Seja $W_1 = \{p \in P_3 / p'(1) = 0\}$ e $W_2 = \{p \in P_3 / p''(1) = 0\}$

Como $p \in P_4$ então $p = a + bx + cx^2 + dx^3$, com $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Se $p \in W_1$ então $p'(1) = 0 \Rightarrow b + 2c + 3d = 0$. Se $p \in W_2$ então $p''(1) = 0 \Rightarrow 2c + 6d = 0$. Para que p pertença a $W_1 \cap W_2$ devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} b + 2c + 3d = 0 \\ 2c + 6d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} c &= -3d \\ b &= 3d \end{aligned}$$

Portanto $W_1 \cap W_2 = \{p \in P_3 / p = a + 3dx - 3dx^2 + dx^3\}$

Exemplo 104 $V = M(n, n)$, $W_1 = \{\text{matrizes triangulares superiores}\}$; $W_2 = \{\text{matrizes triangulares inferiores}\}$. Então $W_1 \cap W_2 = \{\text{matrizes diagonais}\}$.

Exemplo 105 Seja $V = M_2 = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right)$ e

$$W_1 = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & 0 \end{array} \right), a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W_2 = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ c & 0 \end{array} \right), a, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$W = W_1 \cap W_2$ é um subespaço de V , pois

$$W = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right), a \in \mathbb{R} \right\}$$

Exemplo 106 Sejam W_1 e W_2 dados por:

$$W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 0\}$$

e

$$W_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y = 0\}$$

será que $W_1 \cup W_2$ é um subespaço vetorial de V ?

Solução :

Não. Basta considerar $V = \mathbb{R}^2$,

$$u = (1, 1) \in W_2$$

$$v = (1, -1) \in W_1$$

mas $u + v = (1, 1) + (1, -1) = (2, 0) \notin W_1 \cup W_2$ (represente graficamente esta soma de vetores)

3.4 Combinação Linear

Definição 107 Seja V um espaço vetorial real, $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ e $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Então, o vetor

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

é um elemento de V ao que chamamos de combinação linear de $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Exemplo 108 Em $\mathbb{R}^2$ os vetor $v = (10, 16)$ é uma combinação linear dos vetores

$$v_1 = (1, 2) \quad v_2 = (3, 4) \quad \text{pois} \quad v = 4v_1 + 2v_2.$$

Exemplo 109 Verifique se o vetor $v = (3, 2, 1)$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, -1, 1), v_3 = (1, 1, -1)$.

Devemos verificar se existem números a, b, c tais que $v = av_1 + bv_2 + cv_3$, ou seja,

$$(3, 2, 1) = a(1, 1, 1) + b(1, -1, 1) + c(1, 1, -1).$$

devemos então resolver o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mas esse sistema tem uma única solução $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ e $c = 1$, portanto v pode realmente ser escrito como combinação de v_1, v_2 e v_3 , da forma $v = \frac{3}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 + v_3$.

Exemplo 110 No espaço vetorial P_2 o polinômio $p = 7x^2 + 11x - 26$ é combinação linear dos polinômios: $q_1 = 5x^2 - 3x + 2$ e $q_2 = -2x^2 + 5x - 8$, de fato $p = 3q_1 + 4q_2$ (confira).

Exemplo 111 Verique que em P_2 o polinômio $p(x) = 1 + x^2$ é uma combinação dos polinômios $q(x) = 1$, $r(x) = 1 + x$ e $s(x) = 1 + x + x^2$.

Resolução:

Precisamos encontrar números reais, a_1, a_2 e a_3 tais que:

$$p(x) = a_1q(x) + a_2r(x) + a_3s(x)$$

Ou seja, precisamos encontrar a_1, a_2 e a_3 satisfazendo:

$$1 + x^2 = a_1 + a_2(1 + x) + a_3(1 + x + x^2)$$

que é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ a_2 + a_3 = 0 \\ a_3 = 1 \end{cases} \quad :\Leftrightarrow a_1 = 1; a_2 = -1 \text{ e } a_3 = 1.$$

Exemplo 112 Consideremos, no $\mathbb{R}^3$, os seguintes vetores: $v_1 = (1, -3, 2)$ e $v_2 = (2, 4, -1)$. Escreva o vetor $v = (-4, -18, 7)$ como combinação linear dos vetores v_1 e v_2 .

Resolução:

$$v = a_1v_1 + a_2v_2$$

$$\begin{aligned} (-4, -18, 7) &= a_1(1, -3, 2) + a_2(2, 4, -1) = (1a_1, -3a_1, 2a_1) + (2a_2, 4a_2, -1a_2) = \\ &= (a_1 + 2a_2, -3a_1 + 4a_2, 2a_1 - a_2) \text{ que é equivalente ao sistema:} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = -4 \\ -3a_1 + 4a_2 = -18 \\ 2a_1 - a_2 = 7 \end{cases} \quad \Leftrightarrow a_1 = 2, a_2 = -3.$$

Portanto, $v = 2v_1 - 3v_2$. Agora mostre que o vetor $v = (4, 3, -6)$ não é combinação linear dos vetores $v_1 = (1, -3, 2)$ e $v_2 = (2, 4, -1)$.

3.5 Dependência e Independência Linear

Definição 113 Sejam V um espaço vetorial e $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é **linearmente independente (LI)**, se a equação:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$$

implica que

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0.$$

No caso, em que exista algum $a_i \neq 0$ dizemos que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é **linearmente dependente (LD)**.

Para determinarmos se um conjunto é L.I. ou L.D. devemos fazer a combinação linear do conjunto de vetores e igualar esta combinação linear ao vetor nulo do espaço. Portanto é muito importante ter conhecimento do vetor nulo do espaço em que estamos trabalhando.

Definição 114 Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e os conjunto de vetores:

$$\begin{aligned}\alpha &= \{(1, 2, 3), (1, 1, 1), (1, 0, 0)\} \\ \beta &= \{(1, 2, 3), (1, 1, 1), (3, 5, 7)\}\end{aligned}$$

Os conjuntos α e β acima são L.I ou L.D.

Solução:

Fazendo a combinação linear

$$a(1, 2, 3) + b(1, 1, 1) + c(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

temos o sistema homogêneo:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} a + b + c & = & 0 \\ 2a + b & = & 0 \\ 3a + b & = & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

cujas únicas soluções são $a = b = c = 0$. Portanto o conjunto α é L.I

Fazendo a combinação linear

$$a(1, 2, 3) + b(1, 1, 1) + c(3, 5, 7) = (0, 0, 0)$$

temos o sistema homogêneo:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} a + b + 3c & = & 0 \\ 2a + b + 5c & = & 0 \\ 3a + b + 7c & = & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

que possui infinitas soluções (grau de liberdade 1). Portanto além da solução nula (que todo sistema homogêneo tem) este sistemas possui outras soluções diferentes da solução nula, logo o conjunto β é L.D.

Teorema 115 O conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é LD se, e somente se um dos vetores do conjunto for uma combinação linear dos outros.

Exemplo 116 a) Seja $V = \mathbb{R}^3$. Sejam $v_1, v_2 \in V$. O conjunto $\{v_1, v_2\}$ é LD se e somente se v_1 e v_2 estiverem na mesma reta que passa pela origem (um vetor é múltiplo do outro), $v_1 = \lambda v_2$.

b) Em $V = \mathbb{R}^2$, $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ são LI, pois:

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 = 0 \implies a_1(1, 0) + a_2(0, 1) = (0, 0) \implies (a_1, a_2) = (0, 0)$$

logo $a_1 = 0$ e $a_2 = 0$ portanto, e_1 e e_2 são LI.

Exemplo 117 No espaço Vetorial M_2 o conjunto:

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é LD. Examinemos a equação: $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0$

$$a_1 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cujas soluções são $a_1 = -a_3$ e $a_2 = -2a_3$. Como existem soluções $a_i \neq 0$, o conjunto é LD.

Propriedades da Dependência e da Independência Linear

Seja V um E.V

1. Se $A = \{v\} \subset V$ e $v \neq 0$, então A é LI.
2. Se um conjunto $A \subset V$ contém o vetor nulo, então A é LD
3. Se um conjunto $A \subset V$ é LI, qualquer parte de A_1 de A também é LI.

3.6 Subespaços Gerados

Definição 118 Seja V um espaço vetorial. Consideramos um subconjunto $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V, A \neq \emptyset$. O conjunto W de todos os vetores de V que são combinações lineares dos vetores de A é um subespaço de V . Simbolicamente, o subespaço W é:

$$W = \{v \in V \mid v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n\}$$

O subespaço W diz-se gerado pelos vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$, ou gerado pelo conjunto A , e representa-se por:

$$W = [v_1, v_2, \dots, v_n] \text{ ou } W = G(A)$$

Os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ são chamados geradores do subespaço W , enquanto A é o conjunto gerador de W .

Para o caso particular de $A = \emptyset$, define-se $[\emptyset] = \{\vec{0}\}$

$A \subset G(A)$, ou seja, $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset [v_1, v_2, \dots, v_n]$

Todo conjunto $A \subset V$ gera um subespaço vetorial de V , podendo ocorrer $G(A) = V$. Nesse caso, A é um conjunto gerador de V .

Exemplo 119 Os vetores $i = (1, 0)$ e $j = (0, 1)$ geram o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, pois, qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é combinação linear de i e j :

$$(x, y) = xi + yj = x(1, 0) + y(0, 1) = (x, 0) + (0, y) = (x, y)$$

Então: $[i, j] = \mathbb{R}^2$.

Exemplo 120 Seja $V = \mathbb{R}^3$. Determinar o subespaço gerado pelo vetor $v_1 = (1, 2, 3)$.

Solução: Temos:

$$[v_1] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) = a(1, 2, 3), a \in \mathbb{R}\}$$

Da igualdade: $(x, y, z) = a(1, 2, 3)$ vem: $x = a$; $y = 2a$; $z = 3a$ donde: $y = 2x$ e $z = 3x$ logo,

$$[v] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 2x \text{ e } z = 3x\} \text{ ou } [v_1] = \{(x, 2x, 3x); x \in \mathbb{R}\}.$$

Exemplo 121 Encontre o subespaço vetorial de P_3 gerado por $U = \{1, t, t^2, 1 + t^3\}$

Resolução:

note que $t^3 = (t^3 + 1) - 1$. Assim, dado $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in P_3$ podemos escrever

$$p(t) = (a_0 - a_3) + a_1t + a_2t^2 + a_3(t^3 + 1) \in U$$

Ou seja, qualquer vetor (polinômio) de P_3 pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores do conjunto U . Logo $P_3 = [U]$.

Exemplo 122 Encontre o subespaço vetorial gerado de M_2 gerado por

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Resolução: Temos que $A \in [G]$ se e somente se existirem a e $b \in \mathbb{R}$ tais que

$$A = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

ou seja, $A \in [G]$ se e somente se os elementos da diagonal principal de A são nulos.

Exemplo 123 Encontre um conjunto de geradores para $W = \{X \in M(4, 1) \mid AX = 0\}$ onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolução:

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in W &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \\ &\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \\ &\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = \frac{-c}{2} - \frac{d}{2} \\ b = \frac{3c}{2} + \frac{d}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} \frac{-c}{2} - \frac{d}{2} \\ \frac{3c}{2} + \frac{d}{2} \\ c \\ d \end{pmatrix} &= c \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{portanto, } W &= \left[\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

3.7 Soma de Subespaços

Definição 124 Sejam W_1 e W_2 dois subespaços vetoriais de V . Então o conjunto

$$W_1 + W_2 = \{v \in V / v = w_1 + w_2, w_1 \in W_1 \text{ e } w_2 \in W_2\}$$

é um subespaço de V .

Exemplo 125 $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ e $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \right\}$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Então $W_1 + W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\} = M_2$.

Exemplo 126 Sejam os subespaços vetoriais

$$W_1 = \{(a, b, 0); a, b \in \mathbb{R}\} \text{ e } W_2 = \{(0, 0, c), c \in \mathbb{R}\}$$

do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. A soma $W_1 + W_2 = \{(a, b, c); a, b, c \in \mathbb{R}\}$ é subespaço vetorial, que nesse caso é o próprio $\mathbb{R}^3$.

Proposição 127 Quando $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, então $W_1 + W_2$ é chamado soma direta de W_1 com W_2 , e denotado por $W_1 \oplus W_2$.

Observação 128 Usando os geradores podemos obter uma caracterização da soma de dois subespaços: Seja W e U subespaços de V , se $W = [u_1, \dots, u_n]$ e $U = [w_1, \dots, w_m]$ então $W + U = [u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m]$

Exemplo 129 Verifique que $\mathbb{R}^3$ é a soma direta de

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$$

e

$$W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y = 0\}$$

Resolução:

Note que W_2 é de fato um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ (Verifique)

Dado $v \in W_1$, $v = (x, y, -x - y)$ e $u \in W_2$, $u = (0, 0, x + y + z)$

$$u + v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

vamos mostrar que $W_1 \cap W_2 = 0$. Seja $(x, y, z) \in W_1 \cap W_2$ temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = (0, 0, 0)$$

Exemplo 130 Encontre os geradores do subespaço $U + W$ onde

$$\begin{aligned} U &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}, \text{ e} \\ W &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = 0 \text{ e } x - z = 0\} \end{aligned}$$

Resolução: Se $v \in U \Rightarrow v = (x, y, -x - y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)$ logo $U = [(1, 0, -1), (0, 1, -1)]$
 Se $v \in W \Rightarrow v = (x, -x, x) = x(1, -1, 1)$ logo $W = [(1, -1, 1)]$
 Usando a teoria acima explicada temos que

$$U + W = [(1, 0, -1), (0, 1, -1), (1, -1, 1)]$$

3.8 Base e Dimensão de um Espaço Vetorial

3.8.1 Base

Um conjunto $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ é uma base do E.V se:

1. β é LI
2. β gera V

Exemplo 131 $\beta = \{(1, 1), (-1, 0)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$. De fato:

1. β é LI pois $a(1, 1) + b(-1, 0) = (0, 0) \Rightarrow a = b = 0$
2. β gera $\mathbb{R}^2$, pois para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tem-se :

$$(x, y) = y(1, 1) + (y - x)(-1, 0)$$

Realmente , a igualdade $(x, y) = a(1, 1) + b(-1, 0) \Rightarrow a = y$ e $b = y - x$.

Exemplo 132 O conjunto $\{(0, 1), (0, 2)\}$ não é base de $\mathbb{R}^2$ pois é um conjunto LD. Se

$$(0, 0) = a(0, 1) + b(0, 2)$$

temos $a = -2b$. Assim para cada valor de b conseguimos um valor para a , ou seja, temos infinitas soluções.

Exemplo 133 Seja $V = \mathbb{R}^3$ então $\alpha = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$ (verifique!).

Exemplo 134 O conjunto $\beta = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ é uma base do espaço vetorial P_n . De fato:

1. $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0 \Rightarrow a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$, portanto, β é LI.
2. β gera o espaço vetorial P_n , pois qualquer polinômio $p \in P_n$ pode ser escrito assim:

$$p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

que é uma combinação linear de $1, x, x^2, \dots, x^n$.

Logo, β é uma base de P_n . Essa é a base canônica de P_n e tem $n + 1$ vetores.

Exemplo 135 Encontre uma base para $U + W$ onde

$$\begin{aligned} U &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \text{ e} \\ W &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0 \text{ e } x - z = 0\} \end{aligned}$$

Resolução: $U = [(1, 0, -1), (0, 1, -1)]$ e $W = [(1, -1, 1)]$ (Já vimos este exemplo)

$$U + W = [(1, 0, -1), (0, 1, -1), (1, -1, 1)].$$

Já temos um conjunto que gera a soma, se este conjunto for L.I. então ele será uma base.

$$\begin{aligned} a(1, 0, -1) + b(0, 1, -1) + c(1, -1, 1) &= (0, 0, 0) \\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} &\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ logo o conjunto é L.I e} \\ \text{portanto. } \beta = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1), (1, -1, 1)\} &\text{ é uma base de } U + W \end{aligned}$$

Exemplo 136 Encontre uma base para $U + W$ onde

$$\begin{aligned} U &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \text{ e } x - y = 0\}, \text{ e} \\ W &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \text{ e } x - z = 0\} \end{aligned}$$

$$\text{Se } v = (x, y, z) \in U \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow v = (x, x, 0)$$

Usando a teoria acima explicada temos que $U + W = [(1, 0, -1), (0, 1, -1), (1, -1, 1)]$

Como o conjunto $\beta = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1), (1, -1, 1)\}$ é LI (verifique isto) e gera o espaço $U + W$ então ele é uma base do espaço $U + W$.

Exemplo 137 Dados:

$$U = \{A \in M_2(\mathbb{R}); A = A^t\} \text{ e } W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \text{ em } M_2$$

encontre uma base para $U, W, U \cap W, W + U$

Resolução:

Para U : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow c = b$ portanto, $A \in U$ se existirem $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$A = a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pode-se verificar facilmente que as matrizes

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

são L.I e portanto, como geram U , formam uma base de U .

Para W : Como a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gera W , ela serve para base de W

Para $U \cap W$:

$A \in U \cap W \Leftrightarrow A = A^t$ e existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

, isto é, se e somente se existir $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

que é satisfeita quando $\alpha = 0$, ou seja, $A = \mathbf{0}$. Desse modo $U \cap W = \{0\}$. Uma base para $U \cap W$ é $\beta = \phi$. Veja a observação a seguir para elucidar esse fato.

Observação: Seja V um espaço vetorial e $\vec{0} \in V$ o vetor nulo de V . Como o conjunto $\beta = \{\vec{0}\}$ é LD (mostre isto) temos que este conjunto não pode ser uma base do conjunto $N = \{\vec{0}\}$. Este é um caso patológico e para que não seja contrariada a definição de base tomamos $\beta = \phi$ (conjunto vazio) como sendo base para o espaço $N = \{\vec{0}\}$

Para $U + W$: Como $U \cap W = \{0\}$ temos $U + W$ é soma direta e, portanto, uma base é:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Proposição 138 "Todo conjunto LI de um espaço vetorial V é base do subespaço por ele gerado".

Exemplo 139 O conjunto $\beta = \{(1, 2, 1), (-1, -3, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$ é LI e gera o subespaço

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 3x - y - z = 0\}.$$

Então, β é base de W , pois β é LI e gera W .

Teorema 140 Sejam $v_1, v_2, \dots, v_n$, vetores não nulos que geram um espaço vetorial V . Então, dentre estes vetores podemos extrair uma base de V .

Proposição 141 Seja um E.V. V gerado por um conjunto finito de vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$. Então qualquer conjunto com mais de n vetores é necessariamente LD (e, portanto, qualquer conjunto LI tem no máximo n vetores).

3.8.2 Dimensão

Seja V um Espaço Vetorial.

Se V possui uma base com n vetores, então V tem dimensão n e anota-se $\dim V = n$.

Se V não possui uma base, ou seja, a base é $\beta = \emptyset$ então $\dim V = 0$

Se V possui uma base com infinitos vetores, então $\dim V$ é infinita e anota-se $\dim V = \infty$

Exemplo 142 $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ pois toda base de $\mathbb{R}^2$ tem 2 vetores

Exemplo 143 $\dim M(2, 2) = 4$

Exemplo 144 $\dim M(m, n) = m.n$

Exemplo 145 $\dim P_n = n + 1$

Proposição 146 Seja V um E. V. tal que $\dim V = n$

Se W é um subespaço de V então $\dim W \leq n$. No caso de $\dim W = n$, tem-se $W = V$. Para permitir uma interpretação geométrica, consideremos o espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$ ($\dim \mathbb{R}^3 = 3$).

A dimensão de qualquer subespaço W do $\mathbb{R}^3$ só poderá ser 0, 1, 2 ou 3. Portanto, temos os seguintes casos:

1. $\dim W = 0$, então $W = \{0\}$ é a origem
2. $\dim W = 1$, então W é uma reta que passa pela origem
3. $\dim W = 2$, então W é um plano que passa pela origem
4. $\dim W = 3$ então $W = \mathbb{R}^3$.

Proposição 147 Seja V um E. V. de dimensão n . Então, qualquer subconjunto de V com mais de n vetores é Linearmente Dependente (LD).

Proposição 148 Sabemos que o conjunto β é base de um espaço vetorial se β for LI e gera V . No entanto, se soubermos que $\dim V = n$, para obtermos uma base de V basta que apenas uma das condições de base esteja satisfeita.

Exemplo 149 O conjunto $\beta = \{(2, 1), (-1, 3)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$. De fato, como $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ e os dois vetores dados são LI (pois nenhum vetor é múltiplo escalar do outro), eles formam uma base do $\mathbb{R}^2$.

3.8.3 Dimensão da Soma de Subespaços Vetoriais

Proposição 150 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Se U e W são subespaços vetoriais de V então $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.*

No exemplo (137) de base, para encontrar a base de $U + W$ podemos usar esta proposição: $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 3 + 1 - 0 = 4 = \dim M_2$, portanto, $U + W = M_2$ e uma base pode ser dada por:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3.8.4 Coordenadas

Seja V um espaço vetorial gerado e β uma base de V formada pelos vetores $u_1, u_2, \dots, u_n$.

$v \in V$ sendo

$$v = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n$$

Os coeficientes $x_1, x_2, \dots, x_n$ são chamados componentes ou coordenadas de v em relação a base β e se representa por :

$$[v]_\beta = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Exemplo 151 No $\mathbb{R}^2$ consideremos as bases $\alpha = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $\beta = \{(2, 0), (1, 3)\}$ e $\gamma = \{(1, -3), (2, 4)\}$. Dado o vetor $v = (8, 6)$ tem-se:

$$\begin{aligned} (8, 6) &= 8(1, 0) + 6(0, 1) \\ (8, 6) &= 3(2, 0) + 2(1, 3) \\ (8, 6) &= 2(1, -3) + 3(2, 4) \end{aligned}$$

$$\text{temos: } [v]_\alpha = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}, [v]_\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ e } [v]_\gamma = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 152 Mostre que os vetores $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$ e $(0, 0, 1)$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$. Encontre as coordenadas de $(1, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$ com relação à base β formada pelos vetores acima.

Resolução:

Já sabemos que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Então verificamos se os vetores acima são LI. Os vetores são LI se $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Isto é equivalente a que o sistema:

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

cujas soluções são $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, portanto, os vetores v_1, v_2 e v_3 são LI.

$$(1, 2, 0) = a(1, 1, 1) + b(0, 1, 1) + c(0, 0, 1) = (a, a + b, a + b + c)$$

que é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 2 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1, b = 1 \text{ e } c = -2$$

. Desse modo, as coordenadas de $(1, 2, 0)$ em relação à base β é dado por

$$[v]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3.9 Mudança de Base

Sejam $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $\beta' = \{w_1, \dots, w_n\}$ duas bases ordenadas de um mesmo espaço vetorial V . Dado um vetor $v \in V$, podemos escrevê-lo como:

$$\begin{aligned} v &= x_1 u_1 + \dots + x_n u_n \\ v &= y_1 w_1 + \dots + y_n w_n \end{aligned} \quad (3.3)$$

Como podemos relacionar as coordenadas de v em relação à base β

$$[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

com as coordenadas do mesmo vetor v em relação à base β'

$$[v]_{\beta'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

já que $\{u_1, \dots, u_n\}$ é base de V , podemos escrever os vetores w_i como combinação linear dos u_j , isto é:

$$\begin{cases} w_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{n1}u_n \\ w_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{n2}u_n \\ \vdots \\ w_n = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \dots + a_{nn}u_n \end{cases} \quad (3.4)$$

Substituindo em (3.3) temos:

$$\begin{aligned} v &= y_1 w_1 + \dots + y_n w_n = y_1(a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{n1}u_n) + \dots + y_n(a_{1n}u_1 + \\ & a_{2n}u_2 + \dots + a_{nn}u_n) = \\ &= (a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n)u_1 + \dots + (a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n)u_n \end{aligned}$$

Mas $v = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$, e como as coordenadas em relação a uma base são únicas, temos:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ x_n &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{aligned}$$

Em forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \vdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Logo, se usarmos a notação

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{11} & \vdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ temos}$$

temos a relação

$$[v]_{\beta} = [I]_{\beta}^{\beta'} [v]_{\beta'}$$

A matriz $[I]_{\beta}^{\beta'}$ é chamada matriz mudança de base β' para a base β .

Compare $[I]_{\beta}^{\beta'}$ com (3.4) e observe que esta matriz é obtida, colocando as coordenadas em relação a β de w_i na i -ésima coluna. Note que uma vez obtida $[I]_{\beta}^{\beta'}$ podemos encontrar as coordenadas de qualquer vetor v em relação à base β , multiplicando a matriz pelas coordenadas de v na base β' (supostamente conhecida).

Exemplo 153 Sejam $\beta = \{(2, -1), (3, 4)\}$ e $\beta' = \{(1, 0), (0, 1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$.

Procuremos inicialmente $[I]_{\beta}^{\beta'}$

$$w_1 = (1, 0) = a_{11}(2, -1) + a_{21}(3, 4) = (2a_{11} + 3a_{21}, -a_{11} + 4a_{21})$$

$$\text{Isto implica que } a_{11} = \frac{4}{11} \text{ e } a_{21} = \frac{1}{11}$$

$$w_2 = (0, 1) = a_{12}(2, -1) + a_{22}(3, 4)$$

$$\text{Resolvendo, } a_{12} = \frac{-3}{11} \text{ e } a_{22} = \frac{2}{11}$$

$$\text{Portanto, } [I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{-3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

Podemos usar esta matriz para encontrar por exemplo, $[v]_{\beta}$ para $v = (5, -8)$

$$[(5, -8)]_{\beta} = [I]_{\beta}^{\beta'} [(5, -8)]_{\beta'} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{-3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Isto é, } (5, -8) = 4(2, -1) - 1(3, 4)$$

Exemplo 154 Considere as bases em $\mathbb{R}^3$

$$\beta = [(1, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 1, 2)] \text{ e } \beta' = [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)].$$

Encontre $I_{\beta}^{\beta'}$.

Resolução:

$$\begin{aligned} (1, 0, 0) &= a_{11}(1, 0, 1) + a_{21}(1, 1, 1) + a_{31}(1, 1, 2) \\ (0, 1, 0) &= a_{12}(1, 0, 1) + a_{22}(1, 1, 1) + a_{32}(1, 1, 2) \Leftrightarrow \\ (0, 0, 1) &= a_{31}(1, 0, 1) + a_{23}(1, 1, 1) + a_{33}(1, 1, 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a_{11} + a_{21} + a_{31}, a_{21} + a_{31}, a_{11} + a_{21} + 2a_{31}) &= (1, 0, 0) \\ (a_{12} + a_{22} + a_{32}, a_{22} + a_{32}, a_{12} + a_{22} + 2a_{32}) &= (0, 1, 0) \\ (a_{13} + a_{23} + a_{33}, a_{23} + a_{33}, a_{13} + a_{23} + 2a_{33}) &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

Note que cada linha acima representa um sistema de três equações com três incógnitas e que a matriz associada a cada um destes sistemas é a mesma e o que muda são os nomes das variáveis e o segundo membro. Utilizando como variáveis x, y e z , basta resolvermos o seguinte sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$. O sistema acima é equivalente a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c - a \end{pmatrix}$$

cuja solução é dada por $x = a - b$, $y = a + b - c$ e $z = c - a$

Tomando $(a, b, c) = (1, 0, 0)$, obtemos $(a_{11}, a_{21}, a_{31}) = (1, 1, -1)$

Tomando $(a, b, c) = (0, 1, 0)$, obtemos $(a_{12}, a_{22}, a_{32}) = (-1, 1, 0)$

Tomando $(a, b, c) = (0, 0, 1)$, obtemos $(a_{13}, a_{23}, a_{33}) = (0, -1, 1)$. Desta forma obtemos:

$$I_{\beta}^{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.10 A Inversa da Matriz de Mudança de Base

Se em (3.3) começarmos escrevendo os u_i em função dos w_j , chegaremos à relação:

$$[v]_{\beta'} = [I]_{\beta'}^{\beta} [v]_{\beta}$$

Um fato importante é que as matrizes $[I]_{\beta}^{\beta'}$ e $[I]_{\beta'}^{\beta}$ são inversíveis e

$$\left([I]_{\beta}^{\beta'}\right)^{-1} = [I]_{\beta'}^{\beta}$$

Exemplo 155 No exemplo (153) anterior podemos obter $[I]_{\beta}^{\beta'}$ a partir de $[I]_{\beta'}^{\beta}$

Note que $[I]_{\beta'}^{\beta}$ é fácil de ser calculada, pois β' é a base canônica

$$\begin{aligned} (2, -1) &= 2(1, 0) - 1(0, 1) \\ (3, 4) &= 3(1, 0) + 4(0, 1) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad [I]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Então

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{-3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

3.11 Oitava lista de exercícios

- 1) Seja $V = \mathbb{R}^2$ munido com as operações:
 - a) $(x, y) + (s, t) = (x + s, y + t)$, onde $\mathbf{u} = (x, y)$ e $\mathbf{v} = (s, t)$ pertencem a V
 $\alpha(x, y) = (\alpha x, y)$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u} = (x, y) \in V$.
 - b) $(x, y) + (s, t) = (x + t, y + s)$, onde $\mathbf{u} = (x, y)$ e $\mathbf{v} = (s, t)$ pertencem a V
 $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u} = (x, y)$ e $\mathbf{v} = (s, t)$ pertencem a V .
 Em cada item verifique se V com as operações definidas é um espaço vetorial.
- 2) Verifique se o conjunto $W = \{(1, 2, 3), (1, 3, 1), (0, 3, 1), (1, 4, 5)\} \subset \mathbb{R}^3$ é L.I ou L.D.
- 3) Dado o conjunto $W = \{(1, 1, 3), (1, 2, 1), (0, 1, 3), (1, 4, 5)\} \subset \mathbb{R}^3$, extrair um subconjunto de vetores L.I.
- 4) Dados os vetores $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (3, 2, 1)$ e $\mathbf{w} = (-3, 2, 7)$, encontre a e b tais que $\mathbf{w} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$
- 5) Seja $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - z = 0\}$. Mostre que W é um subespaço vetorial e encontre uma base para W .
- 6) Responda se os subconjuntos abaixo são subespaços de M_2 . Em caso afirmativo exiba geradores:
 - a) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid \text{com } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } b = c \text{ e } a = -b \right\}$
 - b) $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid \text{com } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } b - 1 = c + 1 \right\}$
- 7) Seja W o conjunto dos polinômios de grau ≤ 3 cujos gráficos “passam por $(0, 0)$ ”; com as operações usuais. Verifique se W é uma subespaço vetorial de P_3 .

O conjunto $C[A] = \{X \in M_n \mid AX = XA\}$ das matrizes que comutam com A , é um subespaço de M_n ?

O conjunto $S = \{X \in M_2 \mid \det(X) = 0\}$ das matrizes singulares, é um subespaço de M_2

O conjunto $Id = \{X \in M_2 \mid X^2 = X\}$ das matrizes idempotentes, é um subespaço de M_2
- 8) Sejam $W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$ e $W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z + t = 0\}$
 - a) Determine $W_1 \cap W_2$.
 - b) Exiba uma base para $W_1 \cap W_2$.
 - c) Determine $W_1 + W_2$.
 - d) $W_1 + W_2$ é soma direta? Justifique.
 - e) $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$?
- 9) Sejam $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid \text{com } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } a = b \text{ e } d = c \right\}$
 $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid \text{com } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ tais que } a = c \text{ e } b = d \right\}$
 subespaços de $M(2, 2)$, onde $M(2, 2)$ é espaço vetorial das matrizes de ordem dois por dois.
 - a) Determine $W_1 \cap W_2$ e exiba uma base.
 - b) Determine $W_1 + W_2$. É soma direta? $W_1 + W_2 = M(2, 2)$?

10) a) Qual seria uma base "natural" para o espaço P_n ? Dê a dimensão deste espaço vetorial.

b) Verifique se o conjunto $W = \{p \in P_n; p'(0) = 0\}$ é um subespaço de P_n .

11) Considere o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (-2, 2, 1, 1)$ e $\mathbf{v}_4 = (1, 0, 0, 0)$.

a) O vetor $(2, -3, 2, 2) \in [v_1, v_2, v_3, v_4]$? Justifique.

b) Exiba uma base para $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4]$. Qual é a dimensão deste espaço?

c) $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4] = \mathbb{R}^4$? Por quê?

12) Sejam $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $\beta_1 = \{(-1, 1), (1, 1)\}$, $\beta_2 = \{(\sqrt{3}, 1), (\sqrt{3}, -1)\}$ e $\beta_3 = \{(2, 0), (0, 2)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.

a) Encontre a matriz mudança de base:

i) $[I]_{\beta}^{\beta_1}$ ii) $[I]_{\beta_1}^{\beta}$ iii) $[I]_{\beta_2}^{\beta}$ iv) $[I]_{\beta_3}^{\beta}$.

b) Quais são as coordenadas do vetor $v = (3, -2)$ em relação à base

i) β ii) β_1 iii) β_2 iv) β_3 .

c) As coordenadas de um vetor $\mathbf{u}$ em relação à base β_1 são dadas por

$$[\mathbf{u}]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quais as coordenadas do vetor $\mathbf{u}$ em relação à base: i) β ii) β_1 iii) β_2

13) Se

$$[I]_{\alpha}^{\alpha'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

encontre

a) $[\mathbf{v}]_{\alpha}$ onde $[\mathbf{v}]_{\alpha'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ b) $[\mathbf{v}]_{\alpha'}$ onde $[\mathbf{v}]_{\alpha} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

14) Considere o seguinte subespaço de M_2 : $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle/ d = 0 \right\}$.
Sejam

$$\begin{aligned} \alpha &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ \beta &= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

a) Detemine $[I]_{\beta}^{\alpha}$

b) Se $[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} \pi \\ e \\ 0 \end{bmatrix}$, determine $[v]_{\alpha}$.

Capítulo 4

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Definição 156 *Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma Transformação Linear (aplicação linear) é uma função de V em W , $T : V \rightarrow W$, que satisfaz as seguintes condições:*

- *Qualquer que sejam u e v em V ,*

$$T(u + v) = T(u) + T(v)$$

- *Qualquer que sejam $k \in \mathbb{R}$ e v em V ,*

$$T(kv) = kT(v)$$

Exemplo 157 : *Um agricultor planta e comercializa três tipos de verduras: Tomate, Batata, Cenoura. Sejam x_1, x_2, x_3 as quantidades em quilos de Tomate, Batata, Cenoura respectivamente. Se o agricultor vende o quilo do tomate a R\$ 2,00, da batata a R\$ 1,50 e da cenoura a R\$ 1,90 então o total de vendas (T_V) é dado por $2x_1 + 1,5x_2 + 1,9x_3$. A aplicação que a cada tripla $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ associa o total de vendas $T_V(x_1, x_2, x_3)$ é uma aplicação linear. Matematicamente temos uma transformação linear do $E.V \mathbb{R}^3$ no $E.V \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned} T_V &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ T_V(x_1, x_2, x_3) &= 2x_1 + 1,5x_2 + 1,9x_3 \end{aligned}$$

Vamos agora mostrar que de fato esta aplicação é uma transformação linear Chamando $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $v = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ e $k \in \mathbb{R}$ temos:

i)

$$\begin{aligned}
T_V(u+v) &= T_V((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) \\
&= T_V(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \\
&= 2(x_1 + y_1) + 1, 5(x_2 + y_2) + 1, 9(x_3 + y_3) \\
&= 2x_1 + 1, 5x_2 + 1, 9x_3 + 2y_1 + 1, 5y_2 + 1, 9y_3 \\
&= (2x_1 + 1, 5x_2 + 1, 9x_3) + (2y_1 + 1, 5y_2 + 1, 9y_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_V(u) &= T(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 1, 5x_2 + 1, 9x_3 \\
T_V(v) &= T(y_1, y_2, y_3) = 2y_1 + 1, 5y_2 + 1, 9y_3 \\
T_V(u) + T_V(v) &= (2x_1 + 1, 5x_2 + 1, 9x_3) + (2y_1 + 1, 5y_2 + 1, 9y_3)
\end{aligned}$$

Logo $T_V(u+v) = T_V(u) + T_V(v)$.

ii)

$$\begin{aligned}
T_V(ku) &= T_V(k(x_1, x_2, x_3)) \\
&= T_V(kx_1, kx_2, kx_3) \\
&= 2kx_1 + 1, 5kx_2 + 1, 9kx_3 \\
&= k(2x_1 + 1, 5x_2 + 1, 9x_3) \\
&= kT(u)
\end{aligned}$$

Logo $T_V(ku) = kT_V(u)$. De i) e ii) vemos que T_V é uma transformação linear.

Exemplo 158 . Sejam $V = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}$ e $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado $F(u) = u^2$. A aplicação F não é uma transformação linear pois:

$$\begin{aligned}
F(u+v) &= (u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2 \\
F(u) + F(v) &= u^2 + v^2 \\
F(u+v) &\neq F(u) + F(v)
\end{aligned}$$

Exemplo 159 $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (2x, 0, x+y)$

T é uma transformação linear pois,

i)

$$\begin{aligned}
T(u+v) &= T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \\
&= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
&= (2(x_1 + x_2), 0, (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)) \\
&= (2x_1 + 2x_2, 0 + 0, (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)) \\
&= (2x_1, 0, x_1 + y_1), (2x_2, 0, x_2 + y_2) \\
&= T(u) + T(v)
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
 T(ku) &= T(k(x_1, y_1)) \\
 &= T(kx_1, ky_1) \\
 &= (2kx_1, 0, kx_1 + ky_1) \\
 &= k(2x_1, 0, x_1 + y_1) \\
 &= kT(u)
 \end{aligned}$$

Portanto T é uma transformação linear.

Exemplo 160 . $V = W = P_n$ e

$$\begin{aligned}
 D &: P_n \rightarrow P_{n-1} \\
 D(f) &= f'
 \end{aligned}$$

a aplicação derivada que a cada polinômio associa sua derivada, a qual também é um polinômio é uma aplicação linear. De fato, para quaisquer $f, g \in P_n$ e $k \in \mathbb{R}$,

i)

$$\begin{aligned}
 D(f + g) &= (f + g)' \\
 &= f' + g' \\
 &= D(f) + D(g)
 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
 D(kf) &= (kf)' \\
 &= kf' \\
 &= kD(f)
 \end{aligned}$$

Exemplo 161 $V = P_n, W = P_{n+1}, p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

$$\begin{aligned}
 T &: P_n \rightarrow P_{n+1} \\
 T(p(x)) &= xp(x) = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \dots + a_nx^{n+1}
 \end{aligned}$$

A aplicação T é uma transformação linear pois

$$\begin{aligned}
 T(kp) &= x(kp)(x) = xkp(x) = kxp(x) = kT(p) \\
 T(p + q) &= x(p + q)(x) = x(p(x) + q(x)) = xp(x) + xq(x) = T(p) + T(q)
 \end{aligned}$$

Exemplo 162 $V = W = P_n, p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, a, b \in \mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned}
 T &: P_n \rightarrow P_n \\
 T(p(x)) &= p(ax + b) = a_0 + a_1(ax + b) + a_2(ax + b)^2 + \dots + a_n(ax + b)^n
 \end{aligned}$$

Esta aplicação também é linear pois,

$$\begin{aligned} T(kp) &= (kp)(ax + b) = kp(ax + b) = kT(p) \\ T(p + q) &= (p + q)(ax + b) = p(ax + b) + q(ax + b) = T(p) + T(q) \end{aligned}$$

Exemplo 163 Uma transformação linear importante é aquela que se obtém usando-se o produto escalar. Seja $\mathbb{R}^n$ com o produto escalar usual $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $v_0 \in \mathbb{R}^n$ um vetor qualquer fixado. Seja,

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ T(v) &= \langle v, v_0 \rangle \end{aligned}$$

T é uma aplicação linear (mostre isso, use as propriedades do produto escalar)

Exemplo 164 : Sejam $C(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ é contínua}\}$. Considere

$$\begin{aligned} J &: C(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ J(f) &= f(0) \end{aligned}$$

Por exemplo se $f(t) = t^2$ então

$$J(f) = f(0) = 0^2 = 0$$

J é uma aplicação linear pois, se $f, g \in C(\mathbb{R})$ e $k \in \mathbb{R}$ então

$$\begin{aligned} J(f + g) &= (f + g)(0) = f(0) + g(0) = J(f) + J(g) \\ J(kf) &= (kf)(0) = kf(0) = kJ(f) \end{aligned}$$

Exemplo 165 : Seja,

$$\begin{aligned} T &: M_2 \rightarrow M_2 \\ T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} a + b & b + c \\ c + d & d + a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esta aplicação é uma transformação linear, pois

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) &= T\left(\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + b_1 + b_2 & b_1 + b_2 + c_1 + c_2 \\ c_1 + c_2 + d_1 + d_2 & d_1 + d_2 + a_1 + a_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & b_1 + c_1 \\ c_1 + d_1 & d_1 + a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 + b_2 & b_2 + c_2 \\ c_2 + d_2 & d_2 + a_2 \end{bmatrix} \\ &= T\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T\left(k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) &= T\left(k \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} ka + kb & kb + kc \\ kc + kd & kd + ka \end{bmatrix} \\
&= k \begin{bmatrix} a + b & b + c \\ c + d & d + a \end{bmatrix} \\
&= kT\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Exemplo 166 : Seja,

$$\begin{aligned}
T &: M_n \rightarrow \mathbb{R} \\
T(A) &= \det(A)
\end{aligned}$$

Esta aplicação não é uma transformação linear, pois, em geral

$$\det(A_1 + A_2) \neq \det(A_1) + \det(A_2)$$

4.1 Propriedades das Transformações Lineares

Teorema 167 Dados dois espaços vetoriais reais V e W e uma base de V , $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$, sejam $w_1, \dots, w_n$ elementos arbitrários de W . Então existe uma aplicação linear $T : V \rightarrow W$ tal que $T(v_1) = w_1, \dots, T(v_n) = w_n$. Esta aplicação é dada por: Se $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$,

$$T(v) = a_1T(v_1) + \dots + a_nT(v_n) = a_1w_1 + \dots + a_nw_n$$

Exemplo 168 Qual a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 0) = (2, -1, 0)$ e $T(0, 1) = (0, 0, 1)$?

Solução: Temos neste caso $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (0, 1)$ base de $\mathbb{R}^2$ e $w_1 = (2, -1, 0)$ e $w_2 = (0, 0, 1)$.

Dado $v = (x, y)$ arbitrário,

$$\begin{aligned}
v &= xv_1 + yv_2 \\
T(v) &= T(xv_1 + yv_2) \\
T(v) &= xT(v_1) + yT(v_2) \\
T(v) &= x(2, -1, 0) + y(0, 0, 1) \\
T(v) &= (2x, -x, y)
\end{aligned}$$

Exemplo 169 Qual a transformação linear $T : M_2 \rightarrow P_4$ tal que

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= x^4 + x \\ T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= x^3 + x^2 \\ T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) &= x^2 + x^3 \\ T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) &= x + x^4 \end{aligned}$$

Solução

Uma matriz $A \in M_2$ é da forma $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ portanto}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = T\left(a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= aT\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + bT\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + cT\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) + dT\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a(x^4 + x) + b(x^3 + x^2) + c(x^2 + x^3) + d(x + x^4)$$

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + d)x + (b + c)x^2 + (b + c)x^3 + (a + d)x^4$$

Definição 170 : Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. A imagem de T é o conjunto de vetores $w \in W$ tais que existe um vetor $v \in V$, que satisfaz $T(v) = w$. Ou seja

$$\text{Im}(T) = \{w \in W \mid T(v) = w \text{ para algum } v \in V\}$$

Observação 171 Note que $\text{Im}(T)$ é um subconjunto de W e, além disso, é um subespaço vetorial de W .

Exemplo 172 Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por $T(x, y) = (2x - y, -10x + y)$. Qual dos vetores abaixo pertence a imagem de T

- a) $u = (1, 2)$
- b) $w = (-1, 2)$

Solução: a) Para que $u \in \text{Im}(T)$ deve existir algum $v = (x, y)$ tal que $T(v) = u$, ou seja, $T(x, y) = (1, 2)$; temos então:

$$\begin{aligned} T(x, y) &= (1, 2) \\ (2x - y, -10x + y) &= (1, 2) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -10x + y = 2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos $x = -\frac{3}{8}$ e $y = -\frac{7}{4}$, logo u pertence a imagem de T pois $T(-\frac{3}{8}, -\frac{7}{4}) = u$.

b) Analogamente deve existir algum $v = (x, y)$ tal que $T(v) = w$, ou seja

$$\begin{aligned} T(x, y) &= (-1, 2) \\ (2x - y, -10x + y) &= (-1, 2) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ -10x + y = 2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos $x = -\frac{1}{8}$ e $y = \frac{3}{4}$ logo w pertence a imagem de T pois $T(-\frac{1}{8}, \frac{3}{4}) = w$

Exemplo 173 Determine a imagem da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (2x - y - z, x - y - z, x + y - z)$.

Solução: Se $w \in \text{Im}(T)$ então $w = T(x, y, z)$, ou seja,

$$\begin{aligned} w &= (2x - y - z, x - y - z, x + y - z) \\ &= x(2, 1, 1) + y(-1, -1, 1) + z(-1, -1, -1) \end{aligned}$$

Logo todo vetor que pertence a imagem de T é gerado pelos vetores $v_1 = (2, 1, 1)$, $v_2 = (-1, -1, 1)$ e $v_3 = (-1, -1, -1)$. Podemos então escrever que $\text{Im}(T) = [(2, 1, 1), (-1, -1, 1), (-1, -1, -1)]$.

Como o conjunto $\beta = \{(2, 1, 1), (-1, -1, 1), (-1, -1, -1)\}$ é LI (verifique isto) temos que β é uma base para a $\text{Im}(T)$, mas β é base para $\mathbb{R}^3$, logo concluímos que $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^3$.

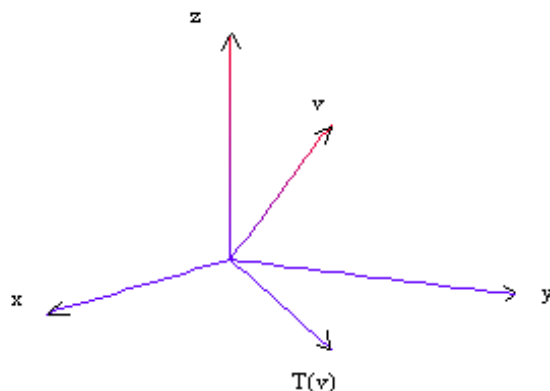
Definição 174 Seja $T : V \rightarrow W$, uma transformação linear. O conjunto de todos os vetores $v \in V$ tais que $T(v) = \vec{0}$ é chamado **núcleo** de T , sendo denotado por $\text{Ker}(T)$. Isto é,

$$\text{Ker}(T) = \{v \in V \mid T(v) = \vec{0}\}$$

Observação 175 Observe que $\text{Ker}(T) \subset V$ é um subconjunto de V e, ainda mais, é um subespaço vetorial de V . Alguns autores denotam o núcleo de T por $N(T)$.

Exemplo 176 Seja $T : V \rightarrow W$, dada por $T(v) = \vec{0}$. Neste caso todo vetor de V é levado no vetor nulo pela transformação T , assim temos que $\text{Ker}(T) = V$

Exemplo 177 Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a projeção ortogonal sobre o plano xy . Neste caso temos $T(x, y, z) = (x, y, 0)$. Se $T(x, y, z) = (0, 0, 0) \Rightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0) \Rightarrow x = 0$ e $y = 0$. Como nada é dito sobre a variável z , temos que z é qualquer, logo $\text{Ker}(T) = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\}$, ou seja o núcleo de T são todos os vetores que estão sobre o eixo z .



Exemplo 178 Encontre o núcleo da transformação linear:

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ T(x, y, z, t) &= (x + y + z - t, 2x + z - t, 2y - t) \end{aligned}$$

Solução: Devemos encontrar os vetores $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tais que $T(v) = T(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$. Neste caso temos que resolver o sistema homogêneo:

$$\begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ 2x + z - t = 0 \\ 2y - t = 0 \end{cases}$$

A matriz ampliada do sistema é:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$p_a = p_c = 3$ e $p = 3 < n = 4$ logo o sistema é compatível e indeterminado com grau de liberdade 1.

Logo,

$$\begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ -2y - z + t = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$$

o que nos fornece,

$$\begin{aligned} x &= y \\ z &= 0 \\ t &= 2y \end{aligned}$$

$$\text{Portanto } \text{Ker}(T) = \{(y, y, 0, 2y) \in \mathbb{R}^4 \mid y \in \mathbb{R}\} = [(1, 1, 0, 2)]$$

Exemplo 179 Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear que é a projeção ortogonal sobre a reta cujas equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Encontre o Núcleo de T .

Solução: Projetar um vetor sobre uma reta é o mesmo que encontrar a projeção ortogonal sobre o vetor diretor dessa mesma reta. No nosso caso, o vetor diretor é $u = (2, -2, 1)$, logo

$$\begin{aligned} T(v) &= \text{proj}_u v = \left(\frac{v \cdot u}{u \cdot u} \right) u \\ T(x, y, z) &= \left(\frac{(x, y, z) \cdot (2, -2, 1)}{(2, -2, 1) \cdot (2, -2, 1)} \right) (2, -2, 1) \\ T(x, y, z) &= \left(\frac{2x - 2y + z}{9} \right) (2, -2, 1) \\ T(x, y, z) &= \left(\frac{4x - 4y + 2z}{9}, \frac{-4x + 4y - 2z}{9}, \frac{2x - 2y + z}{9} \right) \end{aligned}$$

Para encontrar o núcleo devemos ter,

$$T(x, y, z) = \left(\frac{4x - 4y + 2z}{9}, \frac{-4x + 4y - 2z}{9}, \frac{2x - 2y + z}{9} \right) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{aligned} 4x - 4y + 2z &= 0 \\ -4x + 4y - 2z &= 0 \\ 2x - 2y + z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ fazendo o escalonamento temos } \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ assim}$$

$$\begin{aligned} 4x + 4y + 2z &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2z &= -4x - 4y \\ z &= -2x - 2y \end{aligned}$$

Portanto $\text{Ker}(T) = \{(x, y, -2x - 2y) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\} = [(1, 0, -2), (0, 1, -2)]$

Definição 180 Dada uma aplicação $T : V \rightarrow W$, diremos que T é **injetora** se dados $u, v \in V$ com $T(u) = T(v)$ tivermos $u = v$. Ou equivalentemente, T é injetora se dados $u, v \in V$ com $u \neq v$, então $T(u) \neq T(v)$.

Definição 181 Uma aplicação $T : V \rightarrow W$ será **sobrejetora** se a imagem de T coincidir com W , ou seja, $T(V) = W$.

Observação 182 Da definição acima vemos que uma função será sobrejetora se dado $w \in W$, existir $v \in V$ tal que $T(v) = w$.

Teorema 183 Seja $T : V \rightarrow W$, uma aplicação linear. então $\text{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$, se e somente se T é injetora.

Teorema 184 Seja $T : V \rightarrow W$, uma aplicação linear. Então

$$\dim \text{Ker}(T) + \dim \text{Im}(T) = \dim V$$

Corolário 185 Se $\dim V = \dim W$, então T linear é injetora se e somente se T é sobrejetora.

Corolário 186 Seja $T : V \rightarrow W$, uma aplicação linear injetora. Se $\dim V = \dim W$, então T leva base em base.

Exemplo 187 Seja $T : P_n \rightarrow P_{n+1}$, dada por $T(p(x)) = xp(x)$. Verifique se T é bijetora.

Solução: Devemos verificar se T é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo. Usando o teorema (183) devemos apenas calcular o núcleo de T :

$$\begin{aligned} T(p(x)) &= xp(x) \\ T(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) &= x(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) \\ T(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) &= (a_0x + a_1x^2 + \dots + a_nx^{n+1}) \end{aligned}$$

Se

$$\begin{aligned} T(p(x)) &= 0 \\ a_0x + a_1x^2 + \dots + a_nx^{n+1} &= 0 = 0 + 0x + 0x^2 + \dots + 0x^{n+1} \end{aligned}$$

logo $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0 \Rightarrow p(x) = 0$ ($p(x)$ é o polinômio nulo) $\Rightarrow \text{Ker}(T) = \left\{ \vec{0} \right\}$ (observe que neste caso o vetor nulo de P_n é o polinômio nulo de grau n). Portanto T é injetora.

Como $\dim P_n = n + 1$, $\dim P_{n+1} = n + 2$ e $\dim \text{Ker}(T) = 0$, temos que

$$\begin{aligned} \dim \text{Ker}(T) + \dim \text{Im}(T) &= n + 1 \\ 0 + \dim \text{Im}(T) &= n + 1 \\ \dim \text{Im}(T) &= n + 1 \end{aligned}$$

Note que $\dim \text{Im}(T) = n + 1 \neq n + 2 = \dim P_{n+1} \Rightarrow \text{Im}(T) \neq P_{n+1}$. Portanto T não é sobrejetora.

4.2 Transformações Lineares e Matrizes

4.2.1 Transformação linear associada a uma matriz

Seja A uma matriz $m \times n$. Associada a matriz A definimos a transformação linear:

$$\begin{aligned} L_A : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ v &\rightarrow A.v \end{aligned}$$

onde v é tomado como vetor coluna,

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_A(v) &= A.v \\ L_A(v) &= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ L_A \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Das propriedades de operações de matrizes:

$$\begin{aligned}L_A(u+v) &= A.(u+v) = A.u + A.v = L_A(u) + L_A(v) \\L_A(ku) &= A.(ku) = kA.u = kL_A(u)\end{aligned}$$

e portanto L_A é uma transformação linear.

Exemplo 188 *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Observe que a matriz A tem ordem 3×4 e portanto ela induzirá uma transformação linear de $\mathbb{R}^4$ para $\mathbb{R}^3$, definida por:

$$\begin{aligned}L_A &: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\L_A \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \\&= \begin{bmatrix} x+y+z-t \\ 2x+z-t \\ 2y-t \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Note que a transformação acima está escrita em forma matricial, mas podemos escreve-la também na forma vetorial que estamos acostumados:

$$L_A(x, y, z, t) = (x + y + z - t, 2x + z - t, 2y - t)$$

Surpresa!! Esta é a mesma transformação do exemplo (178)

Exemplo 189 *Dada a transformação linear:*

$$\begin{aligned}T &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\T(x, y, z) &= (10x - 20y - 30z, x - 2y - 3z)\end{aligned}$$

Encontre a matriz da transformação T (Isto é, encontre a matriz A cuja transformação associada a ela é exatamente a transformação T)

Solução: Passando da forma vetorial para a forma matricial temos:

$$\begin{aligned}T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} 10x - 20y - 30z \\ x - 2y - 3z \end{bmatrix} \\&= \begin{bmatrix} 10 & -20 & -30 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Portanto a matriz de T , que denotaremos por $[T]$ é

$$[T] = \begin{bmatrix} 10 & -20 & -30 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Observação 190 *Ao obtermos a transformação associada a uma matriz A (ou, caso contrário, a matriz de uma transformação T), não mencionamos as bases dos espaços envolvidos. De fato, ao obtermos a matriz de uma transformação estamos levando em conta as bases associadas aos espaços $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ mas neste caso em particular estamos considerando as bases canônicas. Isto ficará claro na exposição a seguir.*

De um modo geral, fixadas as bases $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $\beta' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$, à matriz

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

podemos associar

$$\begin{aligned} T_A &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ v &\rightarrow T_A(v) \end{aligned}$$

da seguinte maneira: Seja

$$\begin{aligned} X = [v]_\beta &= \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ A.X &= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \end{aligned}$$

então

$$T_A(v) = y_1 w_1 + \cdots + y_m w_m$$

onde $y_i = A_i \cdot X$ e A_i é a i -ésima linha de A .

Em geral, dada uma matriz $A_{m \times n}$, ela é encarada como uma aplicação linear $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ em relação às bases canônica de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

4.2.2 Matriz de uma transformação linear

Agora iremos encontrar a matriz associada a uma transformação linear. Seja $T : V \rightarrow W$ linear, $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V e $\beta' = \{w_1, \dots, w_m\}$ base de W . Então $T(v_1), \dots, T(v_n)$ são vetores de W e portanto

$$\begin{aligned} T(v_1) &= a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ T(v_n) &= a_{1n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m \end{aligned}$$

A transposta da matriz dos coeficientes deste sistema, denotada por $[T]_{\beta'}^{\beta}$ é chamada matriz de T em relação às bases β e β' :

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Observação 191 Note que se $A = [T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ a transformação linear T passa a ser a transformação linear associada à matriz A e bases β e β' , isto é, $T = T_A$

Exemplo 192 Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$.

Sejam $\beta = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ e $\beta' = \{(1, 3), (1, 4)\}$.

Procuremos $[T]_{\beta'}^{\beta}$

$$T(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$$

$$T(1, 1, 1) = (2, 5) = a(1, 3) + b(1, 4)$$

$$T(1, 1, 0) = (3, 1) = c(1, 3) + d(1, 4)$$

$$T(1, 0, 0) = (2, 3) = e(1, 3) + f(1, 4)$$

Portanto temos os sistemas:

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 3a + 4b = 5 \end{cases}, \quad \begin{cases} c + d = 3 \\ 3c + 4d = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} e + f = 2 \\ 3e + 4f = 3 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas temos:

$$[a = 3 \quad b = -1 \quad , \quad c = 11 \quad , \quad d = -8 \quad e = 5 \quad f = -3]$$

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{bmatrix}$$

Teorema 193 : Sejam V e W espaços vetoriais, α base de V , β base de W e $T : V \rightarrow W$ uma aplicação linear. Então, para todo $v \in V$ vale:

Teorema 194

$$[T(v)]_{\beta} = [T]_{\beta}^{\alpha} \cdot [v]_{\alpha}$$

Definição 195 Dada uma base β e transformação linear $T : V \rightarrow V$ denotaremos a matriz $[T]_{\beta}^{\beta}$ apenas por $[T]_{\beta}$ e ela será chamada de matriz de T em relação a base β .

Definição 196 Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear e α a base canônica de $\mathbb{R}^n$, então a matriz de T em relação a base canônica α , $[T]_\alpha^\alpha$, será denotada simplesmente por $[T]$.

Exemplo 197 Seja $T : P_2 \rightarrow P_2$ definido por $T(p(x)) = p(3x - 5)$. Determine a matriz de T em relação a base $\beta = \{1, x, x^2\}$

Devemos calcular $[T]_\beta = [T]_\beta^\beta$

$$\begin{aligned} T(p) &= p(3x - 5) \\ T(a_0 + a_1x + a_2x^2) &= a_0 + a_1(3x - 5) + a_2(3x - 5)^2 \\ T(a_0 + a_1x + a_2x^2) &= a_0 + 3a_1x - 5a_1 + a_2(9x^2 - 30x + 25) \\ T(a_0 + a_1x + a_2x^2) &= (a_0 - 5a_1 + 25a_2) + (3a_1 - 30a_2)x + 9a_2x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(1) &= T(1 + 0x + 0x^2) = 1 = 1 + 0x + 0x^2 \\ T(x) &= T(0 + 1x + 0x^2) = -5 + 3x = -5 + 3x + 0x^2 \\ T(x^2) &= T(0 + 0x + 1x^2) = 25 - 30x + 9x^2 \end{aligned}$$

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 0 & 3 & -30 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Exemplo 198 Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (2x - 3y - 2z, x - y - z, 2x - y + z)$

a) Sejam as bases

$$\begin{aligned} \alpha &= \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\} \\ \beta &= \{(-1, -1, 0), (-1, 0, -1), (0, -1, -1)\} \end{aligned}$$

determine $[T]_\beta^\alpha$, $[T]_\alpha^\beta$

b) Se $[v]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ determine $[T(v)]_\beta$.

c) Calcule a multiplicação das matrizes: $[T]_\beta^\alpha \cdot [T]_\alpha^\beta$. Que conclusão você pode tirar em relação as duas matrizes, ou que relação há entre as duas matrizes?

Solução: a) Cálculo de $[T]_\beta^\alpha$

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= (2x - 3y - 2z, x - y - z, 2x - y + z) \\ T(1, 0, 0) & \end{aligned}$$

$$T(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = a_1(-1, -1, 0) + b_1(-1, 0, -1) + c_1(0, -1, -1)$$

$$T(1, 1, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = a_2(-1, -1, 0) + b_2(-1, 0, -1) + c_2(0, -1, -1)$$

$$T(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = a_3(-1, -1, 0) + b_3(-1, 0, -1) + c_3(0, -1, -1)$$

Devemos resolver os tres sistemas resultantes: Denotando por A a matriz dos coeficientes do sistema, temos:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Vamos resolver os sistemas por matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Logo

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 3 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Agora voce já está em condições de calcular $[T]_{\alpha}^{\beta}$. Faça esse cálculo como exercício

b) Vamos usar a relação $[T(v)]_{\beta} = [T]_{\beta}^{\alpha} \cdot [v]_{\alpha}$

$$\begin{aligned} [T(v)]_{\beta} &= [T]_{\beta}^{\alpha} \cdot [v]_{\alpha} \\ [T(v)]_{\beta} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 3 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ [T(v)]_{\beta} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

c) Faça voce este item e tire suas conclusões. Mais adiante voce poderá verificar se suas conclusões estavam corretas.

Teorema 199 *Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear e α e β bases de V e W respectivamente. Então*

$$\begin{aligned} \dim \text{Im}(T) &= \text{posto de } [T]_{\beta}^{\alpha} \\ \dim \text{Ker}(T) &= \text{nulidade de } [T]_{\beta}^{\alpha} = \text{número de colunas de } [T]_{\beta}^{\alpha} - \text{posto } [T]_{\beta}^{\alpha} \end{aligned}$$

4.3 Composição de transformações lineares

Definição 200 Se $T_1 : V \rightarrow W$ e $T_2 : W \rightarrow U$ são duas transformações lineares a composta das duas transformações lineares é definida do mesmo modo que a composição de funções (lembre-se que um transformação linear é uma função com a propriedade adicional de ser linear) da seguinte forma

$$\begin{aligned} T_2 \circ T_1 & : V \rightarrow U \\ (T_2 \circ T_1)(v) & = T_2(T_1(v)) \end{aligned}$$

Exemplo 201 Se $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T_1(x, y) = (x - y, y - x, y - x)$ e $T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $T_2(x, y, z) = x - y - z$ então $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned} (T_2 \circ T_1)(x, y) & = T_2(T_1(x, y)) \\ & = T_2(x - y, y - x, y - x) \\ & = (x - y) - (y - x) - (y - x) \\ & = x - y - y + x - y + x \\ & = 3x - 3y \end{aligned}$$

Teorema 202 Sejam $T_1 : V \rightarrow W$ e $T_2 : W \rightarrow U$ transformações lineares e α , β , γ bases de V, W, U respectivamente. Então a composta de T_2 com T_1 , $T_2 \circ T_1 : V \rightarrow U$ é linear e

$$[T_2 \circ T_1]_{\gamma}^{\alpha} = [T_2]_{\gamma}^{\beta} \cdot [T_1]_{\beta}^{\alpha}$$

Proposição 203 Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear . Sejam α e α' bases de V e β e β' bases de W . Então vale a relação:

$$[T]_{\beta'}^{\alpha'} = [I_W \circ T \circ I_V]_{\beta'}^{\alpha'} = [I_W]_{\beta'}^{\beta} [T]_{\beta}^{\alpha} [I_V]_{\alpha}^{\alpha'}$$

onde I_W e I_V são as aplicações identidades de W e V respectivamente.

4.4 A Inversa de uma transformação linear

Definição 204 Dá-se o nome de **isomorfismo** a uma transformação linear $T : V \rightarrow W$ que é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo. Quando há um isomorfismo entre dois espaços vetoriais dizemos que estes são **Isomorfos**.

Definição 205 Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. Se existe uma transformação linear $S : W \rightarrow V$ tal que $T \circ S = I_W$, onde $I_W : W \rightarrow W$ é a identidade em W , dizemos que S é a inversa a direita de T . Se existe uma transformação $R : W \rightarrow V$, tal que $R \circ T = I_V$, onde $I_V : V \rightarrow V$ é a identidade em V , dizemos que R é a inversa a esquerda de T .

Definição 206 Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. Se existe uma aplicação $T^{-1} : W \rightarrow V$, tal que $T \circ T^{-1} = I_W$ e $T^{-1} \circ T = I_V$ então dizemos que T é inversível e que T^{-1} é a inversa de T

Proposição 207 Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. Se existe a inversa de T, T^{-1} , então T^{-1} é uma transformação linear

Proposição 208 Se $T : V \rightarrow W$ é um isomorfismo, então T é inversível e além disso T^{-1} também é um isomorfismo.

Proposição 209 Se $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear invertível (T é um isomorfismo) e α e β são bases de V e W , então:

$$[T^{-1}]_{\alpha}^{\beta} = \left([T]_{\beta}^{\alpha}\right)^{-1}$$

Observação: Quando estamos trabalhando com o espaço $\mathbb{R}^n$ e a base canônica de $\mathbb{R}^n$ por simplicidade omitimos as bases e a matriz de $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, em relação a base canônica, é denotada simplesmente por $[T]$. Neste caso a proposição acima é escrita na forma mais conveniente: "Se $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é inversível então $[T^{-1}] = [T]^{-1}$ "

Proposição 210 Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear, com $\dim V = \dim W$, e α e β bases de V e W respectivamente. Então T é inversível se, e somente se $\det [T]_{\beta}^{\alpha} \neq 0$.

Observação 211 Se na proposição acima tivermos $V = W = \mathbb{R}^n$ podemos escrever: Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear, então T é invertível se $\det [T] \neq 0$

Exemplo 212 Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $T(x, y, z) = (x + 2y + 2z, x + y + 3z, x + 2y + z)$, determine a transformação inversa T^{-1} .

Solução: Facilmente podemos ver que

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

logo $T^{-1}(x, y, z) = (-5x + 2y + 4z, 2x - y - z, x - z)$. Como exercício verifique que vale $(T \circ T^{-1})(x, y, z) = (x, y, z)$

Podemos também neste caso calcular a inversa usando diretamente a definição de transformação inversa da seguinte forma

Sabemos que $T^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear tal que $T^{-1} \circ T = I$ ou $T \circ T^{-1} = I$. Suponhamos que $T^{-1}(x, y, z) = (m, n, s)$, devemos encontrar

m, n e s tais que $T \circ T^{-1} = I$ (devemos usar esta igualdade pois com a outra não funciona, tente e veja o que acontece). Portanto

$$\begin{aligned}(T \circ T^{-1})(x, y, z) &= I(x, y, z) = (x, y, z) \\ T(T^{-1}(x, y, z)) &= (x, y, z) \\ T(m, n, s) &= (x, y, z) \\ (m + 2n + 2s, m + n + 3s, m + 2n + s) &= (x, y, z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m + 2n + 2s &= x \\ m + n + 3s &= y \\ m + 2n + s &= z\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & x \\ 1 & 1 & 3 & y \\ 1 & 2 & 1 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{escalonando} \\ \Rightarrow \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 & x - y \\ 0 & 0 & 1 & x - z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}s &= x - z \\ n &= x - y + x - z = 2x - y - z \\ m &= x - 2(2x - y - z) - 2(x - z) = -5x + 2y + 4z\end{aligned}$$

Logo

$$T^{-1}(x, y, z) = (-5x + 2y + 4z, 2x - y - z, x - z)$$

4.5 Nona lista de exercícios

- 1) Seja $T : V \rightarrow W$ uma função. Mostre que
 - a) Se T é uma transformação linear, então $T(0) = 0$.
 - b) Se $T(0) \neq 0$ então T não é uma transformação linear.
- 2) Determine quais das seguintes funções são aplicações lineares:
 - a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, x - y)$
 - b) $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$
 - c) $h : M(2, 2) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
 - d) $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $m(x) = |x|$.
- 3) Resolva os itens abaixo:
 - a) Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0, 0) = (2, 0)$, $T(0, 1, 0) = (1, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, -1)$.
 - b) Encontre $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (3, 2)$.
- 4) Sejam R, S, T tres transformações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$. Se

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } [S] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$
 encontre T tal que $R = S \circ T$.
- 5) Sejam $\alpha = \{(1, -1), (0, 2)\}$ e $\beta = \{(1, 0, -1), (0, 1, 2), (1, 2, 0)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente e

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$
 - a) Encontre T
 - b) Se $S(x, y) = (2y, x - y, x)$, encontre $[S]_{\beta}^{\alpha}$.
 - c) Encontre uma base γ de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T]_{\gamma}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- 6) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (z, x - y, -z)$.
 - a) Determine uma base do núcleo de T .
 - b) Dê a dimensão da imagem de T .
 - c) T é sobrejetora? Justifique.
 - d) Faça um desenho em $\mathbb{R}^3$ do conjunto de vetores que pertencem ao $\ker(T)$
- e a $\text{Im}(T)$.
- 7) Seja β a base canônica de M_2 . Se $T : M_2 \rightarrow P_3$ é dada por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + (b + c)x + (c - d)x^2 + dx^3$$
 - a) Encontre $[T]_{\alpha}^{\beta}$ onde $\alpha = \{2, 2 + x, 2 + x^2, 2 + x^3\}$ é base de P_3
 - b) Faça o escalonamento da matriz $[T]_{\alpha}^{\beta}$

- c) Determine $\dim \text{Ker}(T)$
d) Determine $\dim \text{Im}(T)$.
8) Responda as seguintes questões:
a) Se $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^6$ é uma transformação linear, podemos ter $\dim \text{Im}(T) > 6$? Justifique sua resposta
b) Existe alguma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 1) = (2, 2)$ e $T(2, 2) = (3, 1)$? Justifique sua resposta.
9) Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $[T] = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Encontre os vetores u e v tais que
a) $T(u) = u$
b) $T(v) = -v$
10) Sejam as transformações lineares $S : P_1 \rightarrow P_2$ e $T : P_2 \rightarrow P_1$ definidas por

$$\begin{aligned} S(a + bx) &= a + (a + b)x + 2bx^2 \\ T(a + bx + cx^2) &= b + 2cx \end{aligned}$$

- a) Determine $(S \circ T)(3 + 2x - x^2)$
b) É possível calcular $(T \circ S)(a + bx)$? Em caso afirmativo calcule $(T \circ S)(\pi + \pi x)$.

ALGUMAS SUGESTÕES

- 7) c) A dimensão de $\text{Ker}(T)$ é a nulidade de $[T]_{\alpha}^{\beta}$
7) d) A dimensão de $\text{Im}(T)$ é o posto de $[T]_{\alpha}^{\beta}$

Capítulo 5

OPERADORES LINEARES

Definição 213 *Uma transformação linear $T : V \rightarrow V$ é chamada de operador linear.*

Observação 214 *Todas as propriedades já vistas para transformações lineares em geral vale para um operador linear*

5.1 Transformações especiais no plano e no espaço

Os operadores lineares que veremos a seguir são chamados de transformações especiais do plano e do espaço por serem bastantes usados em aplicações práticas e também em aplicações numéricas.

Transformações no Plano

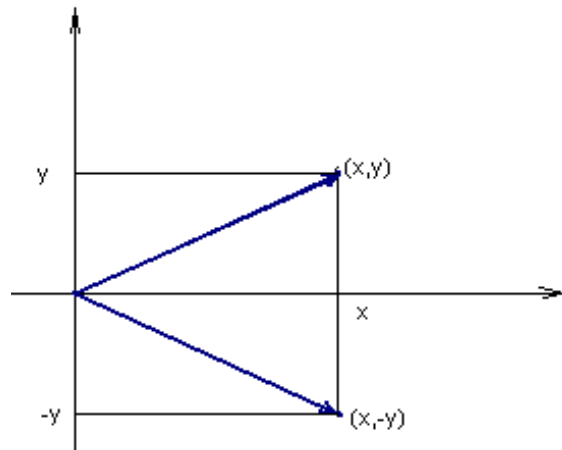
a) Reflexão em torno do eixo dos x

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ T(x, y) &= (x, -y) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Geometricamente:



b) Reflexão em torno do eixo dos y

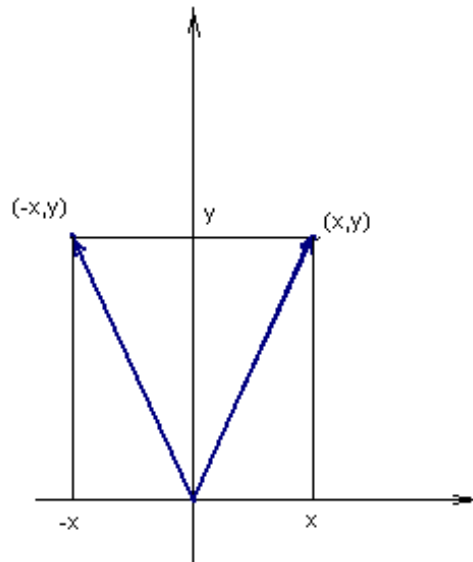
$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T(x, y) = (-x, y)$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Geometricamente:



c) Reflexão na origem

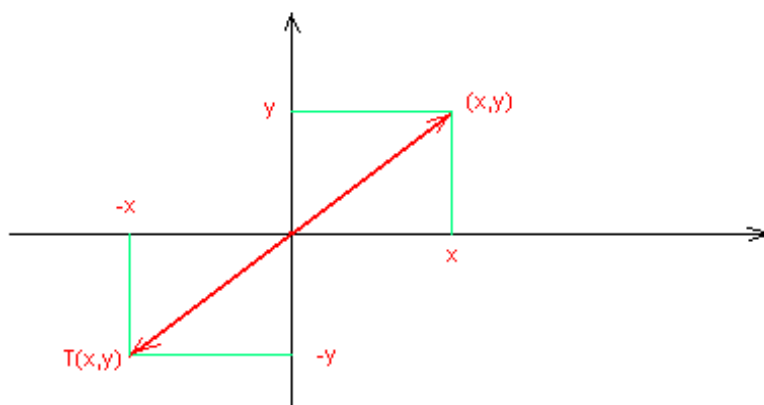
$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T(x, y) = (-x, -y)$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Geometricamente:



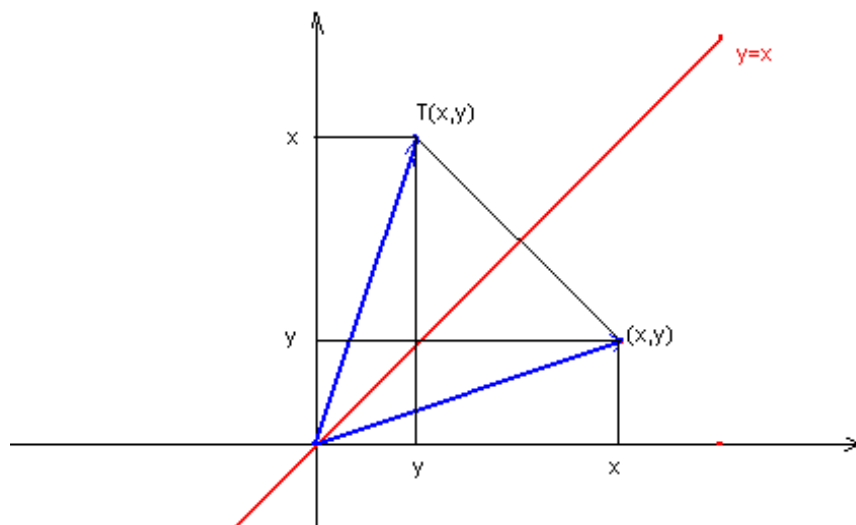
d) Reflexão em torno da reta $y = x$

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ T(x, y) &= (y, x) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Geometricamente:



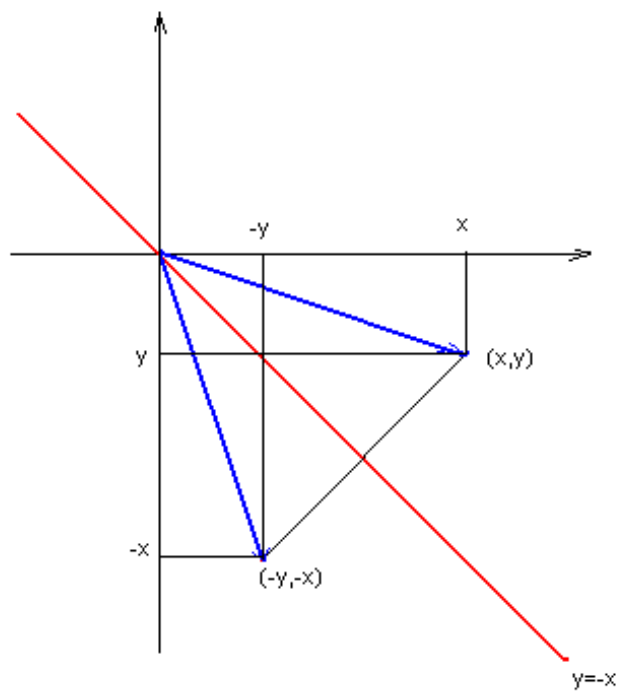
e) Reflexão em torno da reta $y = -x$

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ T(x, y) &= (-y, -x) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Geometricamente:



f) Dilatação ou contração

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T(x, y) = \alpha(x, y)$$

Se $|\alpha| < 1$, T contrai o vetor

Se $|\alpha| > 1$, T dilata o vetor

Se $\alpha = 1$, T é a identidade

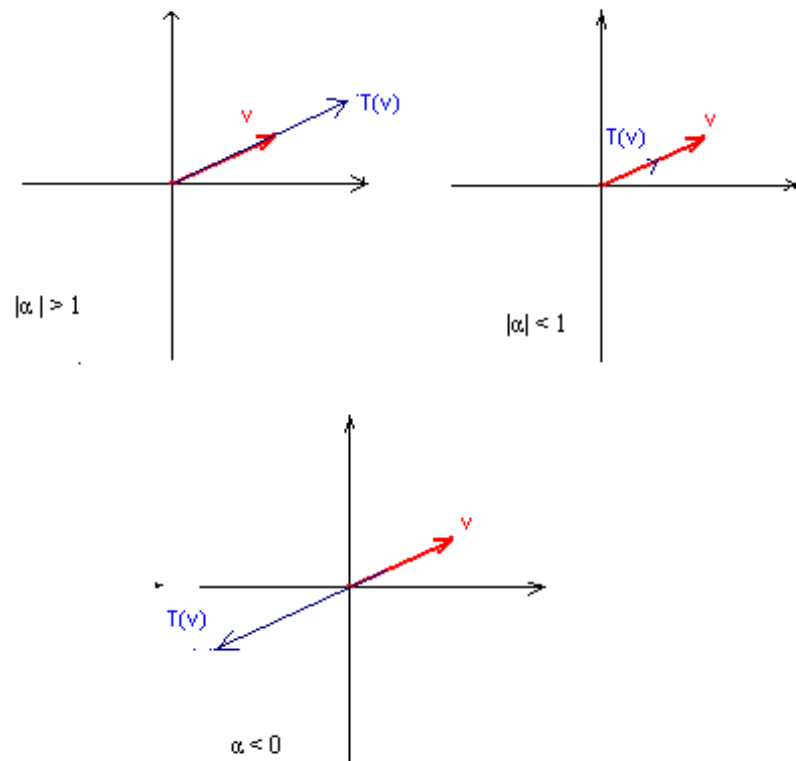
Se $\alpha < 0$, T inverte o sentido do vetor

Se $\alpha > 0$, T mantém o mesmo sentido do vetor

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Geometricamente:



g) Cisalhamento na direção do eixo dos x

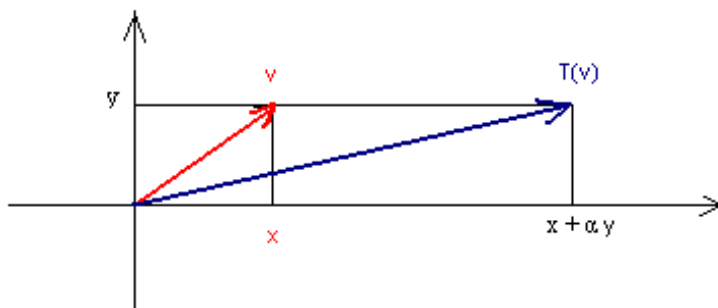
$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T(x, y) = (x + \alpha y, y)$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Geometricamente:



h) Cisalhamento na direção do eixo dos y

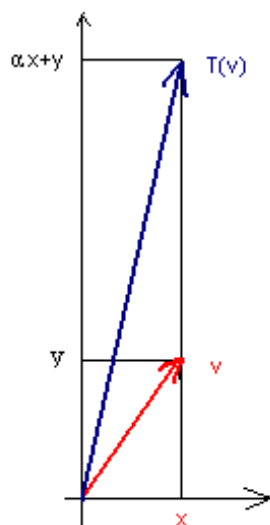
$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T(x, y) = (x, \alpha x + y)$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Geometricamente:

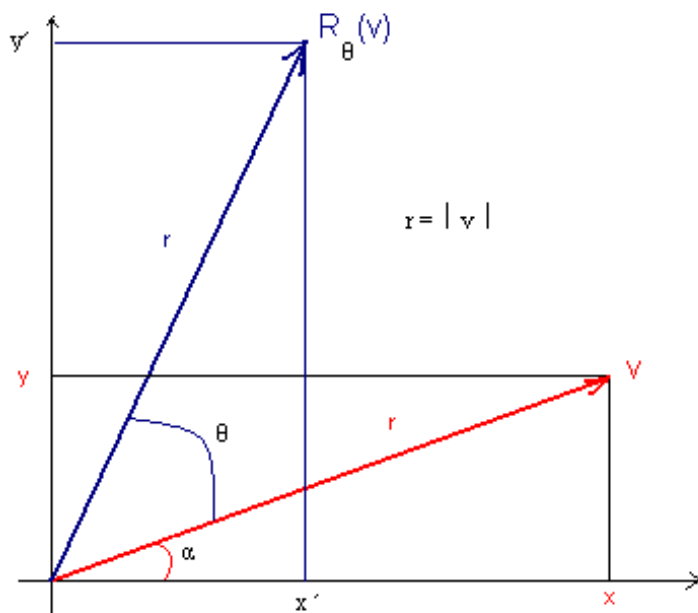


i) Rotação de um ângulo θ
Geometricamente

$$\begin{aligned} R_\theta &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ R_\theta(x, y) &= (x', y') \end{aligned}$$

Vamos agora determinar a matriz da transformação linear rotação de um ângulo θ e a expressão de R_θ em função de x e y .

Quando rotacionamos um vetor, pela própria definição de rotação, o comprimento (módulo) do vetor não se altera. Seja $r = |v|$, onde $v = (x, y)$.



Da figura acima e usando relações trigonométricas temos;

$$x' = r \cos(\alpha + \theta) = r \cos \alpha \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta$$

Mas

$$\begin{aligned} r \cos \alpha &= x \\ r \sin \alpha &= y \end{aligned}$$

então

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$$

Analogamente

$$\begin{aligned} y' &= r \sin(\alpha + \theta) = r \sin \alpha \cos \theta + r \cos \alpha \sin \theta \\ y' &= y \cos \theta + x \sin \theta = x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned}$$

Assim

$$R_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Podemos ver neste caso que matriz de uma rotação é:

$$[R_\theta] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Transformações no Espaço

a) Reflexão em relação aos planos coordenados

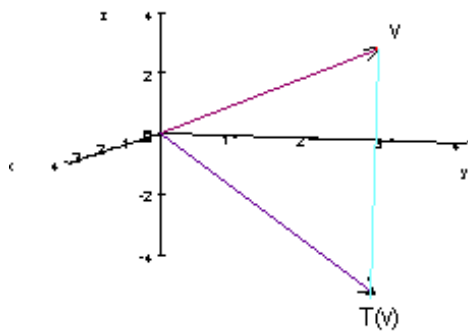
a.1) Plano xy

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ T(x, y, z) &= (x, y, -z) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Geometricamente



a.2) Plano xz

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ T(x, y, z) &= (x, -y, z) \end{aligned}$$

Matricialmente $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

a.3) Plano yz

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ T(x, y, z) &= (-x, y, z) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

b) Reflexão em relação aos eixos coordenados

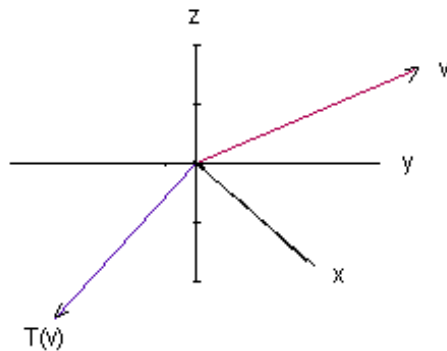
b.1) Em relação ao eixo x

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ T(x, y, z) &= (x, -y, -z) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Geometricamente:



b.2) Em relação ao eixo y

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ T(x, y, z) &= (-x, y, -z) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

b.3) Em relação ao eixo z

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ T(x, y, z) &= (-x, -y, z) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

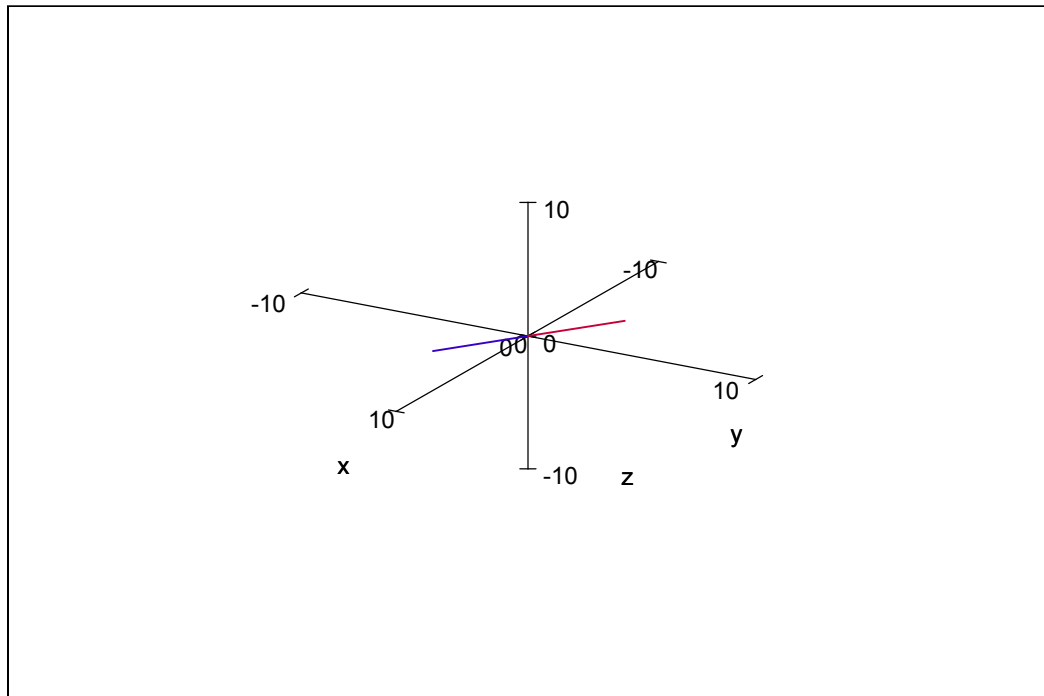
c) Reflexão no origem

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ T(x, y, z) &= (-x, -y, -z) \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Geometricamente



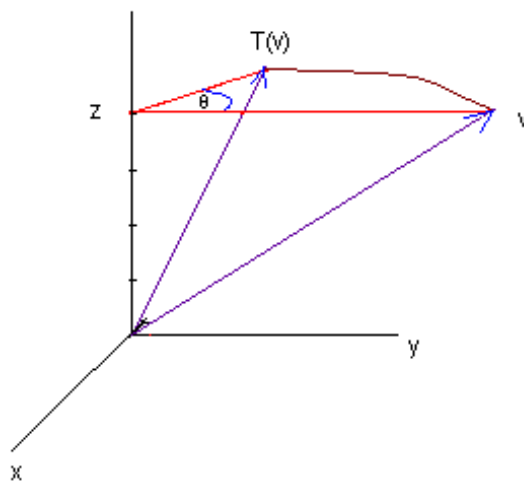
- d) Rotação de um ângulo θ
d.1) Rotação em torno do eixo z

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$T(x, y, z) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, z)$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$



Exemplo 215 Determinar o ângulo formado entre v e $T(v)$ quando o vetor $v = (\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ gira em torno do eixo z de um ângulo $\frac{\pi}{2}$ rad

Solução:

$$\begin{aligned}
[T(v)] &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} & 0 \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}' \\
[T(v)] &= \begin{bmatrix} 0.0 & -1.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}' \\
[T(v)] &= \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}'
\end{aligned}$$

Como desejamos o ângulo entre v e $T(v)$, vamos usar a fórmula do cosseno do ângulo entre dois vetores:

$$\cos \alpha = \frac{v \cdot T(v)}{|v| |T(v)|} = \frac{1}{2}$$

Portanto o ângulo entre v e $T(v)$ é $\alpha = \arccos \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

5.2 Propriedades dos operadores inversíveis

Definição 216 Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Se existir um operador $T^{-1} : V \rightarrow V$ tal que $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I$ (neste caso $I : V \rightarrow V$ é a identidade em V) então dizemos que o operador T é inversível e T^{-1} é o operador inverso de T .

Observação 217 Um operador é inversível se, e somente se, ele é um isomorfismo

Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear:

- I) Se T é inversível e T^{-1} sua inversa, então $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I$
- II) O operador T é inversível se, e somente se, $\text{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$.
- III) O operador T é inversível se, e somente se, $\det [T] \neq 0$
- IV) Se T é inversível, T transforma base em base, isto é, se $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ é base de V então $\beta = \{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ é base de V .

Se T é inversível e β uma base de V então $T^{-1} : V \rightarrow V$ é linear $[T^{-1}]_{\beta}^{\beta} = ([T]_{\beta}^{\beta})^{-1}$. Quando β é a base canônica temos a forma mais simples $[T^{-1}] = [T]^{-1}$ e portanto $[T^{-1}] \cdot [T]^{-1} = [T^{-1} \circ T] = [I]$. Com isso vemos que T é inversível se e somente se $\det [T] \neq 0$.

Exemplo 218 Considere o operador $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dado por

$$R_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

verifique se T é inversível e em caso afirmativo encontre T^{-1}

Solução: Como $\det [R_\theta] = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \neq 0$, temos que R_θ é inversível.

Como $[R_\theta^{-1}] = [R_\theta]^{-1}$, basta calcular a inversa da matriz de R_θ

$$[R_\theta] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$[R_\theta]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} & \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \\ -\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} & \frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \end{bmatrix}$$

$$[R_\theta]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Note que $[R_\theta]^{-1} = [R_\theta]^T$, ou seja, $[R_\theta]$ é uma matriz ortogonal, logo $R_\theta^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \theta + y \sin \theta \\ y \cos \theta - x \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$R_\theta^{-1}(x, y) = (x \cos \theta + y \sin \theta, y \cos \theta - x \sin \theta)$$

Exemplo 219 Seja T o operador $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que é a projeção ortogonal do vetor $v = (x, y, z)$ na direção da reta dada pela interseção dos planos $y = x + 1$ e $z = y + 3$. Verifique se T é inversível e em caso afirmativo determine T^{-1} .

Solução: Para determinar a projeção na direção da reta basta determinar a projeção ortogonal sobre o vetor diretor da reta. Devemos inicialmente determinar o vetor diretor da reta:

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ z = y + 3 \end{cases}$$

Para obter as equações paramétricas fazemos $x = t$, logo

$$\begin{cases} x = t \\ y = t + 1 \\ z = t + 4 \end{cases}$$

portando o vetor diretor da reta é $u = (1, 1, 1)$.

$$\begin{aligned}
 T(v) &= \text{proj}_u v = \left(\frac{v \cdot u}{u \cdot u} \right) u \\
 T(x, y, z) &= \left(\frac{(x, y, z) \cdot (1, 1, 1)}{(1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1)} \right) (1, 1, 1) \\
 T(x, y, z) &= \left(\frac{x + y + z}{3} \right) (1, 1, 1) \\
 T(x, y, z) &= \left(\frac{x + y + z}{3}, \frac{x + y + z}{3}, \frac{x + y + z}{3} \right) \\
 [T] &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\
 \det [T] &= 0
 \end{aligned}$$

Como $\det [T] = 0$ temos que T não é inversível.

Exemplo 220 Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação que é uma rotação de $\frac{\pi}{4} \text{rad}$ e $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação que é uma reflexão em torno da reta $y = -2x$. Determine a transformação $R = S \circ T$.

Solução

$$\begin{aligned}
 R &= S \circ T \\
 [R] &= [S] [T]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [T] &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} \\
 [T] &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S(v) &= 2p - v \\
 S(x, y) &= 2 \left(\frac{(x, y) \cdot (1, -2)}{(1, -2) \cdot (1, -2)} \right) (1, -2) - (x, y) \\
 S(x, y) &= \left(\frac{-3x - 4y}{5}, \frac{-4x + 3y}{5} \right) \\
 [S] &= \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[R] &= [S] [T] \\
[R] &= \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \\
[R] &= \begin{bmatrix} -\frac{7}{10}\sqrt{2} & -\frac{1}{10}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{10}\sqrt{2} & \frac{7}{10}\sqrt{2} \end{bmatrix} \\
R(x, y) &= \left(-\frac{7\sqrt{2}}{10}x - \frac{\sqrt{2}}{10}y, -\frac{\sqrt{2}}{10}x + \frac{7\sqrt{2}}{10}y \right)
\end{aligned}$$

5.2.1 Matrizes Semelhantes

Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Sejam α e β bases de V e $[T]_\alpha^\alpha$, $[T]_\beta^\beta$ matrizes de T em relação as bases α e β respectivamente, então:

$$[T]_\beta^\beta = [I]_\beta^\alpha [T]_\alpha^\alpha [I]_\alpha^\beta$$

Lembrando que $[I]_\alpha^\beta = \left([I]_\beta^\alpha\right)^{-1}$ temos que

$$[T]_\beta^\beta = [I]_\beta^\alpha [T]_\alpha^\alpha \left([I]_\beta^\alpha\right)^{-1}$$

Chamando $[I]_\beta^\alpha = A :$

$$[T]_\beta^\beta = A [T]_\alpha^\alpha A^{-1}$$

Definição 221 Dadas as matrizes A e B , se existe uma matriz P inversível tal que

$$A = PBP^{-1}$$

então dizemos que as matrizes A e B são semelhantes.

Observação 222 Se A e B são semelhantes então $\det A = \det B$, mas não vale a recíproca.

5.3 Operadores autoadjuntos e ortogonais

Definição 223 Seja V um espaço vetorial com produto interno, α uma base ortonormal e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Então:

- a) T é chamado um operador auto-adjunto se $[T]_\alpha^\alpha$ é uma matriz simétrica
- b) T é chamado um operador ortogonal se $[T]_\alpha^\alpha$ é uma matriz ortogonal

Observação 224 Consideraremos aqui apenas os operadores $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, com o produto escalar usual (que é um produto interno no espaço $\mathbb{R}^n$).

Observação 225 Uma base $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é ortonormal se $v_i \cdot v_j = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$

Portanto podemos dizer que um operador $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um *operador auto-adjunto* se $[T]$ (a matriz de T em relação a base canônica) é uma matriz simétrica. $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um *operador ortogonal* se $[T]$ (a matriz de T em relação a base canônica) é uma matriz ortogonal.

Exemplo 226 Consideremos a transformação $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, a rotação de um ângulo θ em torno do eixo z .

$$T(x, y, z) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, z)$$

A matriz da transformação T é

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como esta é uma matriz ortogonal, T é um operador ortogonal

Exemplo 227 Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ onde $T(x, y) = (2x - 2y, -2x + 5y)$. A matriz de T é

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Como a matriz de T é simétrica, então T é um operador simétrico.

Teorema 228 Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear. Se T é um operador auto-adjunto então

$$T(v) \cdot w = v \cdot T(w), \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$$

Teorema 229 Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear. Então são equivalentes as seguintes afirmações

- a) T é ortogonal
- b) T preserva o produto escalar, isto é, $T(v) \cdot T(w) = v \cdot w, \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$
- c) T preserva o módulo, isto é, $|T(v)| = |v|$
- d) T transforma bases ortonormais em bases ortonormais. Isto é, se $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base ortonormal então $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ é uma base ortonormal

5.4 Décima lista de exercícios

- 1) Seja $T(x, y, z) = (2x + y, x + y + z, y - 3z)$
 - a) Mostre que T é um operador auto-adjunto mas não ortogonal
 - b) Se $v = (2, -1, 5)$ e $w = (3, 0, 1)$, verifique que $T(v) \bullet w = v \bullet T(w)$

2) Seja A é uma matriz de ordem n fixada. Seja $T : M_n \rightarrow M_n$ definida por $T(N) = AN - NA$. Mostre que T não é inversível.

3) Se $T : V \rightarrow V$ é um operador linear e $T^2 - T - I = 0$ mostre que T é inversível

4) Sejam $T : V \rightarrow V$ é um operador linear e α e β bases distintas de V . Mostre que $\det [T]_\alpha^\alpha = \det [T]_\beta^\beta$

5) Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ é semelhante à matriz $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

6) Se A e B são semelhantes mostre que $A - I$ e $B - I$ são semelhantes.

7) a) Encontre a transformação T do plano no plano que é uma reflexão em torno da reta $y = 6x$.

b) Escreva-a em forma matricial.

8) No plano, uma rotação anti-horária de 45° é seguida por uma dilatação de $\sqrt{3}$. Ache a aplicação A que representa esta transformação do plano.

9) Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é a projeção de vetor v no plano $x + y + z = 0$. Encontre $T(x, y, z)$.

10) Seja $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ onde L é a reflexão através do plano $x + y + z = 0$. Encontre $L(x, y, z)$.

11) Seja $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ onde L é a rotação de $\frac{\pi}{2}$ em torno do eixo z seguida de uma rotação de $\frac{\pi}{3}$ do em torno do eixo y . Encontre $A(x, y, z)$.

12) Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\text{Ker}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 2x - z\}$

13) Determine se a transformação $T(x, y) = (\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y)$ é uma transformação auto-adjunta ou ortogonal. Justifique sua resposta.

14) Sejam $\alpha = \{(1, 0), (0, -1)\}$ e $\beta = \{(1, 1), (-1, 0)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$, $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ e $[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$. Encontre a matriz P tal que $[T]_\alpha^\alpha = P [T]_\beta^\beta P^{-1}$.

15) Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\text{Im}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 2x - z\}$.

SUGESTÕES

2) Sugestão: Mostre que T não é injetora.

7) Sugestão: Use a projeção do vetor genérico (x, y) sobre algum vetor que está sobre a reta $y = 6x$ e a adição de vetores. (Lembre-se que a projeção de um vetor $\vec{u}$ na direção de um vetor $\vec{v}$ é dada por $\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \right) \vec{v}$).

8) Lembre-se que a composição de transformações pode ser obtida pela multiplicação de suas matrizes (em relação a base canônica)

9) Faça a projeção do vetor (x, y, z) na direção do vetor normal do plano. Use a definição de projeção e a adição de vetores.

10) Sugestão: Considere a projeção do vetor genérico (x, y, z) na direção do vetor normal do plano dado. Use a definição de reflexão e adição de vetores.

14) Utilize as matrizes mudança de base

5.5 Autovalores e Autovetores

Dado um operador linear $T : V \rightarrow V$, estamos interessados em saber quais vetores são levados em um múltiplo de si mesmo; isto é, procuramos um vetor $v \in V$ e um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $T(v) = \lambda v$. Neste caso $T(v)$ será um vetor de mesma direção que v . Por vetor de mesma direção estaremos entendendo vetores sobre a mesma reta suporte. Como $v = \vec{0}$ satisfaz a equação para todo λ , estaremos interessados em determinar vetores $v \neq \vec{0}$ satisfazendo a condição acima.

Definição 230 *Seja $T : V \rightarrow V$, um operador linear. Se existirem $v \in V$, $v \neq \vec{0}$, e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $T(v) = \lambda v$, λ é um autovalor de T e v é um autovetor de T associado a λ .*

Observe que λ pode ser o número 0, embora v não possa ser o vetor nulo.

Exemplo 231 $T : V \rightarrow V$ dado por $T(v) = kv$, onde k é uma constante

Neste caso todo vetor de V é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = k$

Exemplo 232

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (\text{Reflexão no eixo } x) \\ T(x, y) = (x, -y)$$

Neste caso observamos que os vetores que serão levados em múltiplos de si mesmo serão os vetores que estão no eixo x , pois $v = (x, 0) \Rightarrow T(v) = T(x, 0) = (x, 0) = v$. Os vetores que estão no eixo y também são levados em múltiplos de si mesmo pois estes vetores tem a forma $w = (0, y) \Rightarrow T(w) = T(0, y) = (0, -y) = -1(0, y)$. Podemos concluir então que os vetores do tipo $v = (x, 0)$ são autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 1$ e os vetores da forma $w = (0, y)$ são autovetores associados a $\lambda_2 = -1$, da transformação linear reflexão no eixo x .

Exemplo 233

$$R_{\frac{\pi}{2}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (\text{Rotação de um ângulo } \frac{\pi}{2}) \\ R_{\frac{\pi}{2}}(x, y) = (-y, x)$$

Observe que na rotação de $\frac{\pi}{2}$ nenhum vetor é levado em um múltiplo de si mesmo, a direção de todos vetores de $\mathbb{R}^2$ são alterados pela rotação. Portanto a rotação de um ângulo $\frac{\pi}{2}$ não possui autovetores e autovalores.

Teorema 234 *Dada uma transformação linear $T : V \rightarrow V$ e um autovetor v associado a um autovalor λ , qualquer vetor $w = \alpha v$ ($\alpha \neq 0$) também é um autovetor de T associado a λ .*

Observação 235 *Note que se um vetor v é autovetor de uma transformação T associado ao autovalor λ então todos os múltiplos de v também serão autovetores associados a λ . O Conjunto formado por todos os autovetores associados a um mesmo autovalor é um conjunto infinito.*

Teorema 236 *Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um operador auto-adjunto e λ_1, λ_2 autovalores distintos de T e v_1 e v_2 os autovetores associados a λ_1 e λ_2 , respectivamente. Então v_1 é perpendicular a v_2 .*

Definição 237 *O subespaço $V_\lambda = \{v \in V / T(v) = \lambda v\}$ é chamado o subespaço associado ao autovalor λ .*

Como vimos na nota acima o conjunto V_λ contém todos os autovetores de T associados ao autovalor λ , contém também o vetor nulo $\vec{0}$ de V já que o vetor $\vec{0}$ satisfaz a relação $T(\vec{0}) = \lambda \vec{0}$. O conjunto V_λ pode ser escrito como $V_\lambda = \{\text{Todos os autovetores de } T \text{ associados a } \lambda\} \cup \{\vec{0}\}$.

5.5.1 Autovalores e autovetores de uma matriz

Agora vamos obter uma forma de calcular os autovalores e autovetores de uma transformação usando sua matriz em relação as bases canônicas. Inicialmente definiremos autovalores e autovetores de uma matriz A .

Dada uma matriz quadrada, A , de ordem n , estaremos entendendo por autovalor e autovetor de A o autovalor e autovetor da transformação $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, associada a matriz A em relação a base canônica de $\mathbb{R}^n$, isto é $T_A(v) = A \cdot v$ (na forma coluna). Assim, um autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ de A , e um autovetor $v \in \mathbb{R}^n$, são soluções da equação $A \cdot v = \lambda v$, $v \neq \vec{0}$.

5.5.2 Polinômio Característico.

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Para encontrar os autovalores e autovetores de A , devemos resolver a equação:

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v \\ Av &= \lambda Iv \\ Av - \lambda Iv &= \vec{0} \\ (A - \lambda I)v &= \vec{0} \end{aligned}$$

Escrevendo esta equação explicitamente, temos

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} - \lambda \end{bmatrix}$$

temos o sistema

$$B \cdot v = \vec{0}$$

Este sistema é um sistema homogêneo e possui ao menos a solução $v = \vec{0}$. Mas como estamos procurando autovetores, queremos encontrar vetores $v \neq \vec{0}$ que satisfaçam a equação $B \cdot v = \vec{0}$. Sendo assim queremos que o sistema $B \cdot v = \vec{0}$ seja compatível e indeterminado (tenha além da solução trivial, outras soluções não triviais). Pela regra de Cramer se $\det B = 0$ então o sistema homogêneo terá infinitas soluções. Assim, a única maneira de encontrarmos autovetores v (soluções não nulas da equação $B \cdot v = \vec{0}$) é termos $\det B = 0$, ou seja,

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Impondo esta condição determinamos primeiramente os autovalores λ que satisfazem a equação e depois os autovetores a eles associados. Observamos que

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} - \lambda \end{vmatrix}$$

é um polinômio em λ de grau n .

Definição 238 O polinômio $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ é chamado *polinômio característico da matriz A*

Observe que as raízes do polinômio característico são os autovalores da matriz A . Note também que o autovalor pode ser o número zero (quando o polinômio característico tem raízes zero), embora o autovetor v associado a λ não possa ser o vetor nulo.

Exemplo 239 Vamos agora calcular os autovetores e autovalores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solução

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -3 - \lambda & 4 \\ -1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda)(-3 - \lambda) + 4 = \\ &= \lambda^2 + \lambda - 2 \\ p(\lambda) = 0 &\Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda_2 = -2. \end{aligned}$$

Necessitamos calcular os autovetores de A e para isso basta resolvermos o sistema:

$$Av = \lambda v$$

onde $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e λ é cada um dos autovalores já encontrados.

Para $\lambda_1 = 1$ temos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= 1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -3-1 & 4 \\ -1 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Temos um sistema homogêneo cuja matriz ampliada é

$$\left[\begin{array}{cc|c} -4 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{escalonando}} \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$-4x + 4y = 0 \Rightarrow y = x$$

Portando os autovalores associados ao autovalor $\lambda_1 = 1$ são da forma $v = (x, x) = x(1, 1)$ e assim podemos concluir que o subespaço associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$ é $V_1 = [(1, 1)]$.

Para $\lambda_1 = -2$ temos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= -2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -3-(-2) & 4 \\ -1 & 2-(-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Temos um sistema homogêneo cuja matriz ampliada é

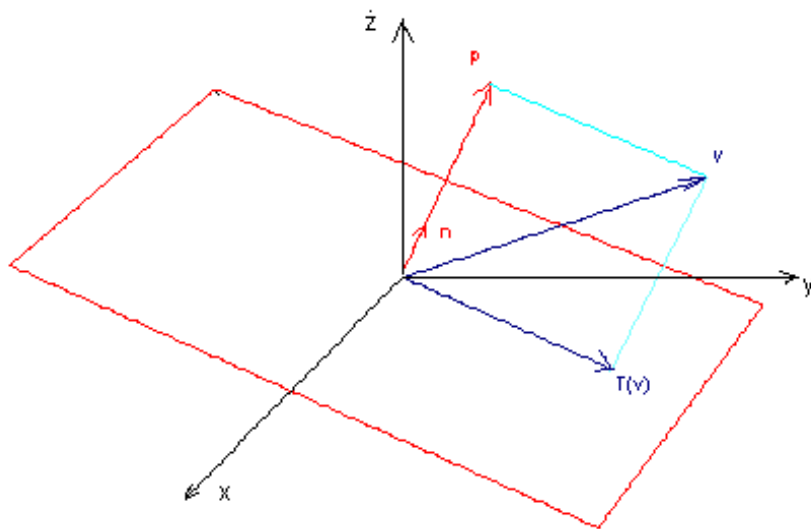
$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{escalonando}} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$-x + 4y = 0 \Rightarrow y = \frac{x}{4}$$

Portando os autovalores associados ao autovalor $\lambda_1 = -2$ são da forma $v = (x, \frac{x}{4}) = x(1, \frac{1}{4})$ e assim podemos concluir que o subespaço associado ao autovalor $\lambda_2 = -2$ é $V_{-2} = [(1, \frac{1}{4})]$.

Exemplo 240 Encontre os autovalores e autovetores da transformação linear que a cada vetor $v \in \mathbb{R}^3$ associa a sua projeção ortogonal no plano $x + y - z = 0$.

Solução: Devemos encontrar a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = \text{projecção de } v \text{ no plano } x + y - z = 0$.



Da figura acima vemos que para obtermos a projeção sobre o plano devemos inicialmente fazer a projeção do vetor v na direção do vetor normal n para obter o vetor $p = \text{proj}_n v$. Com isso temos,

$$\begin{aligned} T(v) + p &= v \\ T(v) &= v - p \\ T(v) &= v - \text{proj}_n v \end{aligned}$$

Um vetor normal do plano $x + y - z = 0$ é $n = (1, 1, -1)$, logo, como $v = (x, y, z)$ temos

$$\begin{aligned} p &= \text{proj}_n v \\ p &= \left(\frac{v \cdot n}{n \cdot n} \right) n \\ p &= \left(\frac{(x, y, z) \cdot (1, 1, -1)}{(1, 1, -1) \cdot (1, 1, -1)} \right) (1, 1, -1) \\ p &= \left(\frac{x + y - z}{3} \right) (1, 1, -1) \\ p &= \left(\frac{x + y - z}{3}, \frac{x + y - z}{3}, -\frac{x + y - z}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(v) &= v - p \\
T(x, y, z) &= (x, y, z) - \left(\frac{x+y-z}{3}, \frac{x+y-z}{3}, -\frac{x+y-z}{3} \right) \\
T(x, y, z) &= \left(\frac{2x-y+z}{3}, \frac{-x+2y+z}{3}, \frac{x+y+2z}{3} \right)
\end{aligned}$$

Para calcular os autovalores de T devemos encontrar a matriz de T . Neste caso,

$$\begin{aligned}
[T] &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \\
p(\lambda) &= \det([T] - \lambda I) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \frac{2}{3} - \lambda & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} - \lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\
p(\lambda) &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = 0
\end{aligned}$$

As raízes de $p(\lambda)$ são $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 1$.

Para $\lambda_1 = 0$ vamos calcular os autovalores associados resolvendo o sistema.

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuja matriz ampliada é,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{escalando}} \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = 0 \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
y &= -z \\
x &= -z
\end{aligned}$$

Portanto os autovalores associados ao autovalor $\lambda_1 = 0$ são da forma $v = (-z, -z, z)$

Observação 241 Note que acima damos a forma geral dos autovetores, no caso acima temos $v = x(-1, -1, 1)$ assim um autovetor é $v = (-1, -1, 1)$ como todo autovetor é um múltiplo de $v = (-1, -1, 1)$ temos que $V_0 = [(-1, -1, 1)]$, isto é, o subespaço associado ao autovalor $\lambda_1 = 0$ é gerado pelo vetor $v = (-1, -1, 1)$. Note que geometricamente o subespaço $V_0 = [(-1, -1, 1)]$ é formado pelos vetores que são múltiplos do vetor normal ao plano, ou seja, por todos os vetores ortogonais ao plano.

Para $\lambda_1 = 1$ temos vamos calcular os autovalores associados resolvendo o sistema.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} - 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} - 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} & \\ \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{escalando}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{cases} -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 - x - y + z = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \\ y = 0 \\ z = x \end{aligned}$$

Portanto os autovalores associados ao autovalor $\lambda_3 = 1$ são da forma $v = (x, 0, x) = x(1, 0, 1)$. Logo $V_1 = [(1, 0, 1)]$. Note que geometricamente os autovetores da forma $v = x(1, 0, 1)$ são aqueles vetores que estão sobre o plano (pois para $v = (1, 0, 1)$ temos $v \cdot n = (1, 0, 1) \cdot (-1, -1, 1) = 0$).

5.6 Décima primeira lista de exercícios

- 1) Construa uma matriz 2×2 **não diagonal** com autovalores 1 e -1 .
- 2) Se k é um número inteiro, λ um autovalor da matriz A e v um autovetor de A associado ao autovalor λ . Mostre que λ^k é um autovalor da matriz A^k associado ao autovetor v .
- 3) Encontre os autovalores de A^9 se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- 4) Encontre os autovalores e autovetores das transformações lineares dadas:
 - a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (2y, x)$
 - b) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x + y, 2x + y)$
 - c) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z)$
 - d) $T : P_2 \rightarrow P_2$ tal que $T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + cx + b$
 - e) $T : M(2, 2) \rightarrow M(2, 2)$ tal que $A \rightarrow A^T$
- 5) Encontre a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que T tenha autovalores -2 e 3 associados aos autovetores $(3y, y)$ e $(-2y, y)$ respectivamente.

- 6) Encontre os autovalores e autovetores correspondentes das matrizes

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{c) } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- 7) Seja $T : V \rightarrow V$ linear
 - a) Se $\lambda = 0$ é autovalor de T , mostre que T não é injetora.
 - b) A recíproca é verdadeira? Ou seja, se T não é injetora, $\lambda = 0$ é autovalor de T ?
- 8) Quais são os autovalores e autovetores do operador derivação $D : P_2 \rightarrow P_2$, $D(p) = p'$.

- 9) Determine os autovalores e autovetores, se existirem, do operador linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ obtido quando se faz uma rotação de $\pi \text{ rad}$ em torno do eixo x , seguida de uma contração de $\frac{1}{2}$.

- 10) Seja $T : V \rightarrow V$ o operador linear que tem autovalores $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \dots, \lambda_n = n$ associados aos autovetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ respectivamente. Sabendo que $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e que $[v]_\beta =$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix}, \text{ determinar } [T(v)]_\beta.$$

- 11) Seja A uma matriz quadrada e A^T sua transposta. as matrizes A e A^T possuem os mesmos autovalores e autovetores? Justifique sua resposta.

- 12) Encontre os autovalores e autovetores da transformação linear que a cada vetor $v \in \mathbb{R}^3$ associa a sua projeção ortogonal no plano $x + y = 0$.

13) Seja o operador $T : P_3 \rightarrow P_3$ definido por $T(p) = x^3 p(\frac{1}{x})$:

a) Mostre T é inversível.

b) Calcule a inversa T^{-1} do operador T

ALGUMAS RESPOSTAS

13) Considere $p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, calcule $T(p)$ e determine o núcleo de T .

11) Para calcular os autovalores de A , basta determinar as raízes do polinômio $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Para calcular os autovalores de A^T , basta determinar as raízes do polinômio $p(\lambda) = \det(A^T - \lambda I)$. Portanto basta verificar que $\det(A^T - \lambda I) = \det(A - \lambda I)$.

Capítulo 6

APLICAÇÕES

6.1 Aplicações da Álgebra Linear na Engenharia Cartográfica

Esse trabalho tem como um de seus objetivos, dar uma noção da utilidade prática dos assuntos vistos no ciclo básico, além de permiti-los conhecer um pouco o trabalho em uma das engenharias estudadas no Instituto, visando assim a multidisciplinalidade no curso de Engenharia. Trata-se do estudo da aplicação de uma disciplina do curso básico, a Álgebra Linear, no ciclo profissional; no caso, na Engenharia Cartográfica, onde ajustes e organização de dados, obtidos seja por satélites (GPS), seja por fotografias ou por qualquer outro meio, se fazem constantes no trabalho de um engenheiro cartógrafo.

O engenheiro cartógrafo dispõe de um método, o método dos mínimos quadrados, para obter informações relativas a parâmetros de correção e ajuste de dados obtidos em observações e pesquisas. Para este método os dados obtidos são organizados matricialmente, de forma que possam ser relacionados com valores pré-estabelecidos, tais como temperatura, latitude, longitude, altitude, entre outros. Obtem-se, desta forma, um sistema de n equações lineares, onde esse n pode assumir valores realmente grandes, resultando um sistema com milhares de equações. Sendo a resolução de sistemas de equações lineares um dos campos de estudo da Álgebra Linear.

Na Geodésia, por exemplo, as coordenadas de um ponto podem ser obtidas na resolução de um sistema obtido pela sujeição de dados obtidos de observações angulares (tais como azimutes, ângulos e/ou direções) a um determinado modelo geométrico.

As coordenadas também podem ser obtidas a partir da observação da diferença de fase da portadora L1 e/ou L2, frequências de operações do satélite de GPS.

A Álgebra Linear também tem aplicações na Fotogrametria, para a transformação de coordenadas (espaço imagem para espaço objeto, que seriam as

coordenadas de terreno, obtidas através de um sistema deduzido através de observações nas fotografias e no terreno). Na digitalização de documentos, por exemplo, um mapa em papel, após ser processado, dá origem a um mapa digital armazenado na forma vetorial (lista de coordenadas).

Também na área de Sensoriamento Remoto, seja para o processamento digital de imagens, ou na modificação ou no controle de imagens (brilho constante e georeferenciamento) ou ainda no armazenamento da imagem na forma matricial; utilizam-se tópicos abordados pela Álgebra Linear, como sistemas de equações lineares e operações com matrizes.

6.2 Aplicações de espaços vetoriais na computação gráfica

Autor: Luiz Antônio Pereira

Trabalho publicado na revista MICRO SISTEMAS de Novembro de 1982

Introdução: Uma das aplicações interessantes em computadores e com vasta possibilidade de emprego nas áreas de engenharia civil, arquitetura, desenho industrial, mecânica, etc é a representação gráfica, no plano, de elementos tridimensionais.

Dentre todos os tipos de perspectivas a que apresenta resultados gráfico mais interessantes é a perspectiva cônica, posto que que é a que simula com maior perfeição a visão real do objeto. apresentaremos, a seguir, o desenvolvimento da teoria matemática e veremos que a ferramenta principal é a teoria das transformações lineares.

Caracterizando o Objeto: Inicialmente deve-se informar ao computador as características geométricas do objeto. isto é possível referenciando-se o elemento a um sistema cartesiano de coordenadas, determinando-se daí as coordenadas x, y e z dos pontos que o formam. Deve-se estabelecer também as ligações entre esses pontos com o uso de segmentos de retas. Com isso, obtém-se um poliedro cujos vértices são os pontos e cujas arestas são os segmentos de retas. O efeito de curvatura pode ser obtido aumentando-se o número de vértices e arestas (refinamento). Dessa forma todos os vértices P_i , terão coordenadas x_i, y_i e z_i , e as arestas a_{kj} ligarão dois vértices genéricos P_k e P_j .

De um modo geral, desenhar uma perspectiva consiste em ligar, através de segmentos de retas pontos do plano cujas coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são "transformações" das coordenadas x, y e z dos pontos do espaço. Mais explicitamente falando para cada ponto $P_i(x_i, y_i, z_i)$ no espaço determina-se um ponto $\bar{P}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ no plano tal que suas coordenadas $\bar{x}_i$ e $\bar{y}_i$ são funções de x_i, y_i e z_i e de um conjunto de parâmetros, que chamaremos de parâmetros de localização do observador e do plano projetante e que indicaremos por U . Matematicamente

$$(\bar{x}_i, \bar{y}_i) = f(x_i, y_i, z_i, U)$$

Como se sabe, a perspectiva cônica utiliza - além das noções de objeto, plano projetante e linha de visada - um ponto origem ou observador, de onde

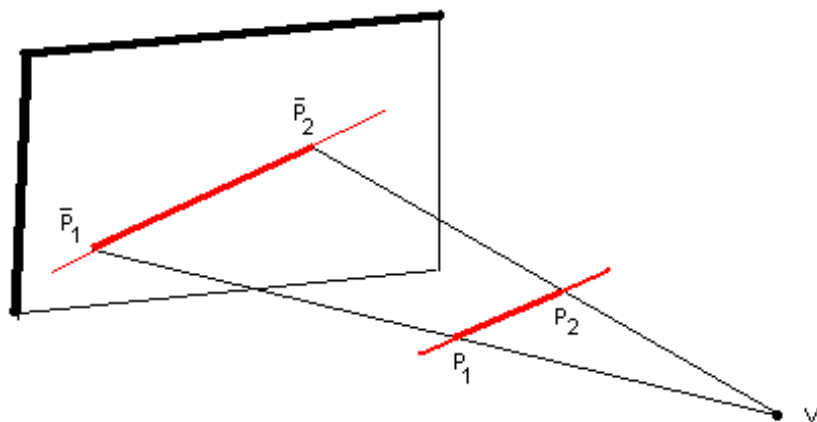


Figura 6.1: Figura 1

partem as linhas de visada e que se localiza à uma distância finita do objeto e do plano projetante. A projeção $\bar{P}$ do ponto P no plano α é a interseção da reta definida pelo observador V e pelo ponto P (visada) com o plano projetante α . A projeção de uma reta é obtida unindo-se as projeções de dois de seus pontos (Fig 1) e, de uma maneira geral, a projeção de um objeto é determinada pelas projeções de todos os seus pontos.

No nosso caso, o plano projetante é a tela do computador. Para chegarmos às expressões que fornecem $\bar{x}$ e $\bar{y}$ de cada ponto vamos estabelecer as seguintes convenções:

1. O observador V tem coordenadas (x_v, y_v, z_v)
2. Os n vértices do objeto e suas projeções são representadas por P_1 a P_n e $\bar{P}_1$ a $\bar{P}_n$, respectivamente.
3. A tela representa a área formada por um retângulo de lados L_1 e L_2 unidades de comprimento. O plano desse retângulo é perpendicular à linha que une o observador à origem do sistema x, y, z de coordenadas.
4. A distância R do plano projetante à origem do sistema de eixos é considerada positiva se o plano se encontra do mesmo lado do observador em relação à origem, e negativa se a origem estiver entre o plano e o observador.
5. O lado L_1 (maior lado) do retângulo é paralelo ao plano $z = 0$.
6. O sistema $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ de coordenadas, bem como os outros parâmetros se apresentam como mostra a Fig 2.

Fazendo $A = \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}$, e se $A \neq 0$ podemos obter a equação do plano projetante (segundo as convenções adotadas) da seguinte forma: Da fórmula da

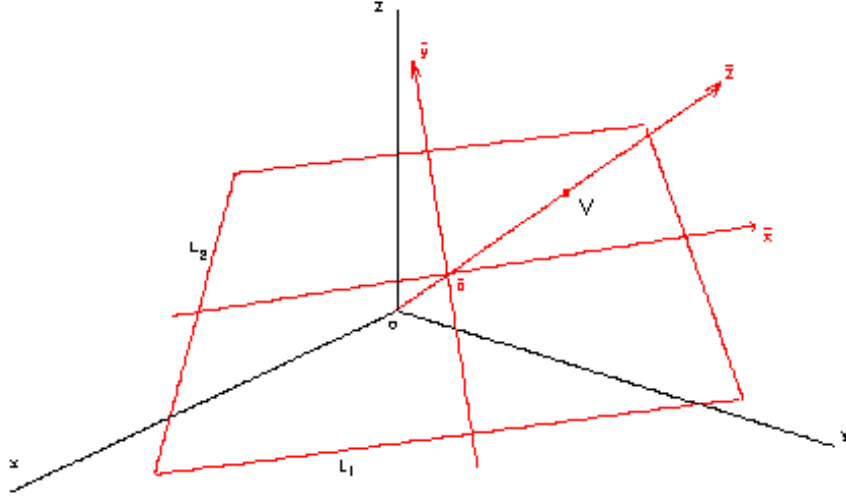


Figura 6.2: Figura 2

distância de ponto a plano temos

$$d(\pi, P_0) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

onde $P(x_0, y_0, z_0)$ é o ponto e $\vec{n} = (a, b, c)$ é o vetor normal ao plano.

No nosso caso temos que $P_0(0, 0, 0)$ e $\vec{n} = (x_v, y_v, z_v)$. Chamando $R = d(P_0, \alpha)$ (α é o plano projetante) temos que R pode ser positivo ou negativo e por isso dispensamos o módulo na fórmula da distância, logo, tomando $-R$ escrevemos,

$$\begin{aligned} -R &= \frac{x_v 0 + y_v 0 + z_v 0 + d}{\sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}} \\ d &= -R\sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2} = -RA \end{aligned}$$

Portanto a equação do plano projetante α é:

$$x_v x + y_v y + z_v z - RA = 0 \quad (6.1)$$

Para cada ponto $P_i(x_i, y_i, z_i)$ a equação paramétrica da reta que o liga ao ponto $V(x_v, y_v, z_v)$ é

$$\begin{aligned} x &= t(x_i - x_v) + x_v \\ y &= t(y_i - y_v) + y_v \\ z &= t(z_i - z_v) + z_v \end{aligned} \quad (6.2)$$

Para determinarmos a interseção entre a reta e o plano projetante colocamos os valores de (6.2) na equação (6.1) do plano, ou seja:

$$x_v [t(x_i - x_v) + x_v] + y_v [t(y_i - y_v) + y_v] + z_v [t(z_i - z_v) + z_v] - RA = 0 \quad (6.3)$$

$$tx_v(x_i - x_v) + x_vx_v + ty_v(y_i - y_v) + y_vy_v + tz_v(z_i - z_v) + z_vz_v - RA = 0$$

$$t [x_v(x_i - x_v) + y_v(y_i - y_v) + z_v(z_i - z_v)] + A^2 - RA = 0$$

$$t [x_v(x_i - x_v) + y_v(y_i - y_v) + z_v(z_i - z_v)] = RA - A^2$$

e daí tiramos o valor do parâmetro t :

$$t = \frac{RA - A^2}{x_v(x_i - x_v) + y_v(y_i - y_v) + z_v(z_i - z_v)} \quad (6.4)$$

Com $t, x_i, y_i, z_i, x_v, y_v$ e z_v conhecidos, e usando novamente as equações (6.2) determinamos as coordenadas x, y e z da projeção do ponto P no plano projetante. Nessa fase estamos exatamente como a Fig 3.

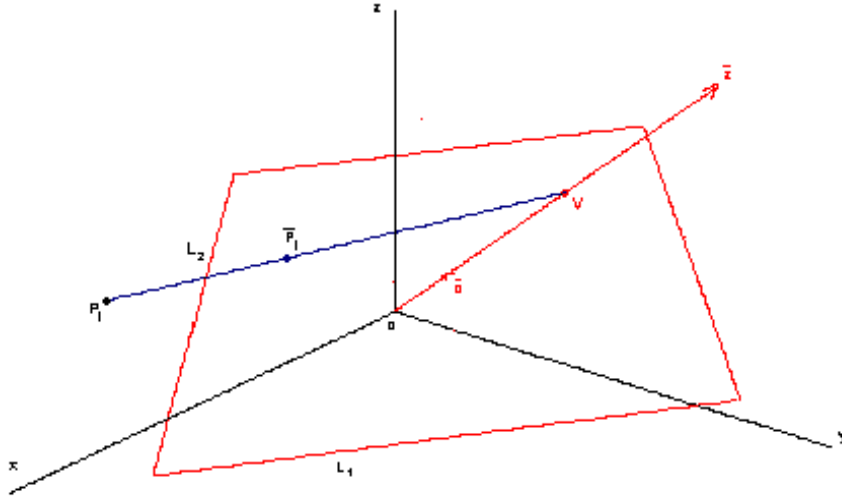


Figura 3

De (6.4) e (6.2) com $x_i = y_i = z_i = 0$, vem

$$\begin{aligned} x_{\bar{0}} &= \frac{x_v R}{A} \\ y_{\bar{0}} &= \frac{y_v R}{A} \\ z_{\bar{0}} &= \frac{z_v R}{A} \end{aligned} \quad (6.5)$$

que são as coordenadas da origem do sistema $\overline{xyz}$ (fig 6.2). Esse sistema nos é particularmente interessante pois o plano $\overline{xy}$ é o próprio plano projetante.

O que nos resta a fazer é, portanto, uma transformação de coordenadas, ou seja, determinar as coordenadas dos pontos projeções em relação ao novo sistema $\overline{xyz}$. Para isso, devemos determinar as componentes dos vetores unitários $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ no sistema xyz .

A interseção do plano projetante com o plano xy é uma reta cuja equação é encontrada fazendo-se $z = 0$ em (6.1). Isso nos leva a:

$$y = \frac{RA - x_v x}{y_v} \quad (6.6)$$

cujos gráfico está na Fig 4. O vetor diretor dessa reta tem componentes dadas por:

$$\vec{w} = (0, \frac{RA}{y_v}, 0) - (\frac{RA}{x_v}, 0, 0) = (-\frac{RA}{x_v}, \frac{RA}{y_v}, 0) \quad (6.7)$$

o vetor $\vec{i}$ é um vetor unitário e portanto

$$\begin{aligned} \vec{i} &= \frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w} \\ \vec{i} &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{RA}{x_v}\right)^2 + \left(\frac{RA}{y_v}\right)^2}} \left(-\frac{RA}{x_v}, \frac{RA}{y_v}, 0\right) \\ \vec{i} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x_v^2} + \frac{1}{y_v^2}}} \left(-\frac{1}{x_v}, \frac{1}{y_v}, 0\right) \\ \vec{i} &= \frac{1}{\sqrt{x_v^2 + y_v^2}} (-y_v, x_v, 0) \end{aligned} \quad (6.8)$$

O vetor unitário $\vec{k}$ tem sua determinação imediata pois é o versor do vetor $\vec{00}$ (ver Fig 2 e equação 6.5)

$$\begin{aligned} \vec{k} &= \frac{\vec{00}}{|\vec{00}|} = \frac{1}{\left|\left(\frac{x_v R}{A}, \frac{y_v R}{A}, \frac{z_v R}{A}\right)\right|} \left(\frac{x_v R}{A}, \frac{y_v R}{A}, \frac{z_v R}{A}\right) \\ \vec{k} &= \frac{1}{\sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}} (x_v, y_v, z_v) \\ \vec{k} &= \frac{1}{A} (x_v, y_v, z_v) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Observe que o vetor $\vec{k}$ é exatamente o versor do vetor $\vec{V} = (x_v, y_v, z_v)$.

Como nosso sistema é ortogonal, o vetor unitário $\vec{j}$ é dado por $\vec{j} = \vec{k} \times \vec{i}$, ou seja

$$\vec{j} = \det \begin{bmatrix} \frac{x_v}{A} & \frac{y_v}{A} & \frac{z_v}{A} \\ \frac{-y_v}{\sqrt{x_v^2 + y_v^2}} & \frac{x_v}{\sqrt{x_v^2 + y_v^2}} & 0 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

$$\vec{j} = \frac{1}{A\sqrt{x_v^2 + y_v^2}} (-z_v x_v, -z_v y_v, x_v^2 + y_v^2) \quad (6.11)$$

O sistema definido por es vetores unitários não é propriamente o nosso sistema $\overline{xyz}$ e sim ele a menos de uma translação (Fig 5). Essa translação deverá apenas anular o valor da componente em o que não importa para nós já que estamos interessados nas componentes $\overline{x}$ e $\overline{y}$ apenas.

O que temos que fazer agora é determinar a matriz mudança de base da base $\alpha = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ para a base $\beta = \{\vec{\overline{i}}, \vec{\overline{j}}, \vec{\overline{k}}\}$, ou seja, $[I]_\beta^\alpha$. Esta matriz nos permitira

$$\alpha = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

$$\beta = \{\vec{\overline{i}}, \vec{\overline{j}}, \vec{\overline{k}}\}$$

$$\beta = \left\{ \frac{1}{\sqrt{x_v^2 + y_v^2}} (-y_v, x_v, 0), \frac{1}{A\sqrt{x_v^2 + y_v^2}} (-z_v x_v, -z_v y_v, x_v^2 + y_v^2), \frac{1}{A} (x_v, y_v, z_v) \right\}$$

Portanto

$$[I]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} \frac{-y_v}{\sqrt{x_v^2 + y_v^2}} & \frac{x_v}{\sqrt{x_v^2 + y_v^2}} & 0 \\ \frac{-z_v x_v}{\sqrt{x_v^2 + y_v^2}} & \frac{-z_v y_v}{\sqrt{x_v^2 + y_v^2}} & \frac{x_v^2 + y_v^2}{\sqrt{x_v^2 + y_v^2}} \\ \frac{x_v}{A} & \frac{y_v}{A} & \frac{z_v}{A} \end{bmatrix}$$

e as coordenadas do novo sistema são

$$[v]_\beta = [I]_\beta^\alpha [v]_\alpha$$

$$\begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-y_v}{\sqrt{x_v^2 + y_v^2}} & \frac{x_v}{\sqrt{x_v^2 + y_v^2}} & 0 \\ \frac{-z_v x_v}{\sqrt{x_v^2 + y_v^2}} & \frac{-z_v y_v}{\sqrt{x_v^2 + y_v^2}} & \frac{x_v^2 + y_v^2}{\sqrt{x_v^2 + y_v^2}} \\ \frac{x_v}{A} & \frac{y_v}{A} & \frac{z_v}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Observação 242 Algumas mudanças de notações foram efetuadas em relação ao trabalho original. Também foram inseridos alguns conceitos matemáticos que o artigo original não fornece mas que para nossa disciplina mostra bem a utilização dos conceitos vistos e sua aplicação prática. No trabalho original também é fornecido um programa para a HP-45 onde é aplicada toda a teoria vista acima, mas não é difícil fazer um código de modo a gerar figuras em 3d utilizando a teoria vista acima

6.3 Aplicações de autovalores e autovetores na engenharia civil

6.3.1 O Problema de autovalor na avaliação de modelos estruturais de edificações

Trabalho apresenta no COBENGE 2003 por

José Guilherme Santos da Silva - jgss@uerj.br

Pedro Colmar G. da S. Vellasco - vellasco@uerj.br

Rita de Kassia D. Lopes - rita.lopes021@ig.com.br

Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ, Faculdade de Engenharia,

FEN

Rua São Francisco Xavier, N0 524, Maracanã

CEP: 20550-900, Rio de Janeiro, RJ

Resumo: O presente trabalho apresenta uma contribuição inicial acerca de dois aspectos: o primeiro diz respeito ao ensino de engenharia, com a aplicação de conceitos referentes ao problema clássico de autovalores e autovetores na avaliação de sistemas estruturais. O segundo ponto relevante a ser discutido, diz respeito ao estudo da influência das ligações entre as vigas e colunas, referentes a estruturas de aço. Na prática corrente de projeto, grande parte dessas ligações é representada por modelos flexíveis ou rígidos. Todavia, na maioria dos casos reais, essas ligações assumem um comportamento intermediário, ou seja: semi-rígido. Assim sendo, este trabalho tem por objetivo empregar conceitos básicos de álgebra linear, a partir do problema clássico de autovalores e autovetores, de forma a se analisar modelos estruturais de pórticos de aço correspondentes a uma edificação residencial existente. São investigadas as diferenças, qualitativas e quantitativas, existentes entre as frequências naturais e os modos de vibração dentre os diversos modelos estruturais (flexível, semi-rígido e rígido). Resultados já obtidos indicam que a variação na rigidez inicial das ligações provoca mudanças sensíveis no comportamento dinâmico da estrutura.

Palavras-chave: Ensino de engenharia, Estruturas de aço, Método dos Elementos Finitos,

Autovalores, Autovetores.

1. INTRODUÇÃO

Sabe-se que o déficit habitacional brasileiro cresce a cada ano, concentrando-se o problema, principalmente, nas famílias de baixo poder aquisitivo, de forma que existe uma demanda crescente por estudos sobre as habitações populares. Neste sentido, o aço, como material estrutural é adequado para a construção industrializada e pode proporcionar à construção civil, perspectivas mais otimistas para a habitação popular no país.

Uma das etapas relevantes no projeto de estruturas de aço está relacionada a uma avaliação coerente acerca dos modelos estruturais que representam o comportamento real das ligações existentes entre as vigas e as colunas de aço. Na prática corrente de projeto, a grande maioria dessas ligações é representada

por modelos flexíveis ou rígidos. Todavia, na maior parte dos casos, essas ligações assumem um comportamento intermediário, ou semi-rígido, o qual pode ser perfeitamente caracterizado com base em determinadas grandezas associadas ao projeto de uma ligação, tais como: resistência à flexão e capacidade de rotação. No que tange ao estudo do comportamento dinâmico de estruturas, assunto que será abordado com mais detalhe no presente trabalho, mais especificamente no que diz respeito à aplicação do problema clássico de autovalores para determinação e avaliação das frequências naturais (autovalores) e modos de vibração (autovetores) de edificações residenciais, observase, com clareza, uma absoluta falta de conhecimento por parte dos alunos de graduação acerca da importância do tema e, infelizmente, uma completa indiferença em relação ao assunto.

Assim sendo, de forma a contribuir no que tange ao ensino de engenharia, como também desmistificar o emprego corrente dos conceitos teóricos, principalmente aqueles relacionados ao problema de autovalores, faz-se uma exposição resumida do referido problema, como tratado no ciclo básico da engenharia, e de como o mesmo poderia ser mencionado, de forma a que os alunos de graduação pudessem ter uma idéia básica da aplicação prática desses conceitos.

Em seguida, é selecionado o projeto de uma edificação residencial de quatro pavimentos, composto por vigas e colunas de aço e lajes lisas de concreto armado, em todos os níveis da edificação. Tem-se como objetivo proceder a uma análise extensa das frequências naturais (autovalores) e modos de vibração (autovetores) dos modelos referentes aos pórticos de aço da referida edificação. Um outro ponto relevante do trabalho diz respeito ao estudo da influência das ligações entre as vigas e colunas dos pórticos de aço.

Neste sentido, o presente trabalho tem por objetivo apresentar uma aplicação prática do problema clássico de autovalores e autovetores, no caso em questão com respeito ao projeto de edificações residenciais, além de reforçar a importância dos conceitos básicos da disciplina de Álgebra Linear para a solução deste tipo de problema.

2. O CICLO BÁSICO NA ENGENHARIA E O PROBLEMA DE AUTOVALOR

O problema clássico de autovalores e autovetores, principalmente no que tange a utilização de operações matriciais, está diretamente relacionado com o ensino da disciplina Álgebra Linear, oferecida correntemente aos alunos de graduação no ciclo básico da Faculdade de Engenharia da UERJ, FEN/UERJ.

O ensino da disciplina Álgebra Linear não oferece nenhuma interação com o ciclo profissional da engenharia e nenhum tipo de recomendação no que diz respeito a sua extrema relevância na aplicação prática desses conceitos sobre os problemas reais de engenharia. Tal fato não só desestimula o aluno de graduação em engenharia, como também ocasiona um aprendizado de baixa qualidade, propagando deficiências técnicas que serão sentidas, sem sombra de dúvida, no decorrer do curso.

Ainda hoje, a didática de ensino adotada nas disciplinas do ciclo básico sobre o problema clássico de autovalores e autovetores é baseada em métodos estritamente conceituais e matemáticos. Tal metodologia é apresentada a seguir,

respaldada por uma breve revisão sobre as definições de autovalor e autovetor, como visto tradicionalmente na disciplina de Álgebra Linear, LIPSCHUTZ (1977), NETTO e ADÃO (1995).

Senão vejamos: Seja T uma transformação linear em um espaço vetorial real V aplicada a um corpo $\mathbb{k}$. Denomina-se autovalor o escalar real pertencente a $\mathbb{k}$ ($\lambda \in \mathbb{k}$) se, para esta transformação linear T , existe um vetor não-nulo pertencente a V ($\nu \in V$) para o qual:

$$T(\nu) = \lambda\nu \quad (6.12)$$

Todo vetor não-nulo ν que satisfaça a “equação 6.12” é chamado autovetor de T correspondente ao autovalor λ . Portanto, sendo A uma matriz quadrada de ordem $n \times n$ sobre um corpo $\mathbb{k}$, existe um autovalor λ se, para uma matriz coluna $\nu_{n \times 1}$, denominada autovetor, $A\nu = \lambda\nu$ é verdadeiro.

Obs: Nos cursos de engenharia geralmente utilizamos como corpo $\mathbb{k}$ o corpo dos números reais, ou seja, no nosso caso $\mathbb{k} = \mathbb{R}$. Para a obtenção dos autovalores, reescreve-se a “equação 6.12” de modo que $(\lambda I - A)\nu = 0$, que admitirá $\nu \neq 0$ como solução se, e somente se, $\det(A - \lambda I) = 0$. A expressão $\det(A - \lambda I) = 0$ é denominada equação característica, onde I é a matriz identidade.

A contribuição mais relevante deste trabalho de pesquisa é caracterizar que o ensino do problema de autovalor como feito no ciclo básico da engenharia, de acordo com o exposto acima, é absolutamente contrário ao que se deveria informar a um futuro engenheiro. Não há relação alguma entre os termos específicos (tais como, espaço vetorial, corpo, etc.), utilizados no ensino da disciplina de Álgebra Linear e as grandezas empregadas correntemente na engenharia. Ressalta-se que esses elementos têm o mesmo significado das grandezas conhecidas usualmente pelo engenheiro. Além disso, em nenhum momento existe um indicativo de onde e como o aluno de graduação, deve utilizar esses conceitos, extremamente relevantes para a vida prática de um profissional da área, SILVA (2001).

Uma sugestão para uma abordagem mais apropriada ao ensino do problema de autovalor para os alunos de graduação em engenharia seria, inicialmente, associar o termo autovalor às frequências naturais e o termo autovetor aos modos de vibração de um elemento ou sistema estrutural qualquer, dando ênfase ao significado físico dessas grandezas, ROEHL (1981).

Senão vejamos: para um sistema estrutural qualquer sob vibração livre não amortecida, com vários graus de liberdade, pode ser escrita uma equação matricial de movimento tal que,

$$M\ddot{V} + KV = 0 \quad (6.13)$$

onde, M é a matriz de massa, K é a matriz de rigidez, $\ddot{V}$ é o vetor das acelerações e V é o vetor dos deslocamentos.

As equações que tornam possível a resolução do problema de autovalor, cujo sistema vibra livremente e sem amortecimento, são as seguintes:

$$(M^{-1}K - \varpi_{0i}^2 I) \phi_i = 0 \quad (6.14)$$

onde ϕ_i é o i -ésimo modo de vibração, com i variando de 1 a n . A “equação 6.14” é verdadeira, para qualquer ϕ_i , se

$$\det (M^{-1}K - \varpi_{0i}^2 I) = 0 \quad (6.15)$$

onde I representa a matriz identidade.

A “equação 6.15” é comumente designada como equação característica e suas raízes são os valores característicos, ou autovalores, e correspondem ao quadrado das frequências naturais de um sistema estrutural, ϖ_{0i}^2 . A cada uma dessas raízes corresponde um vetor característico, ϕ_i , ou autovetor, que representa o modo de vibração do referido sistema.

Deve-se ressaltar, novamente, que o problema clássico de autovalores é absolutamente essencial para a compreensão e análise de estruturas simples, tais como treliças, vigas, pórticos, placas, etc, como também de sistemas estruturais mais complexos, dentre os quais podem ser citados os seguintes: edificações residenciais, pontes rodoviárias e ferroviárias, torres de aço de telecomunicações e de transmissão de energia, estádios de futebol, passarelas de pedestres, edifícios altos, plataformas off-shore, etc.

3. AVALIAÇÃO DE MODELOS ESTRUTURAIS PARA EDIFICAÇÕES

Na Engenharia Civil, infelizmente, ainda é corrente o desenvolvimento de projetos de estruturas de aço sem se proceder a uma análise, mesmo que preliminar, acerca do comportamento dinâmico da estrutura. Evidentemente, sabendo-se que o aço é um material que possui uma baixa capacidade de amortecimento, e tendo em mente que é absolutamente imperativo que sejam mantidas as condições de segurança de qualquer estrutura, torna-se necessário, em inúmeros casos, proceder, pelo menos, uma análise preliminar acerca das frequências naturais e modos de vibração do sistema estrutural.

Assim sendo, de acordo com os objetivos básicos desta investigação e de forma a dar respaldo à aplicação do problema de autovalores e autovetores na avaliação de modelos estruturais de edificações, contribuindo para a modernização do ensino de engenharia, são desenvolvidos modelos computacionais, com base no emprego do programa computacional ANSYS, ANSYS (1998), a partir do projeto real de uma edificação popular. Na sequência, procede-se a uma análise acerca das frequências naturais e modos de vibração desses modelos.

Assim sendo, os alunos de graduação em engenharia podem constatar que a aplicação do referido problema é bastante simples e tem uma importância prática inquestionável para a engenharia civil.

3.1 Modelo estrutural

O desenvolvimento do presente trabalho de pesquisa se baseia no estudo de pórticos de aço bidimensionais, pertencentes a uma estrutura real de um edifício popular de quatro pavimentos, BRITO JR (2001). A Figura 1 apresenta um desenho esquemático onde são mostrados todos os pórticos de aço da edificação

com suas respectivas colunas. Na sequência do texto, a Figura 2 mostra todos os modelos estruturais idealizados para esses pórticos.

Os pórticos de aço foram agrupados, de acordo com suas propriedades geométricas, em quatro grupos, conforme mostra a Tabela 1 e Figura 1. Todas as propriedades físicas do material, adotadas nos modelos computacionais desenvolvidos, podem ser vistas na Tabela 2.

Tabela 1 - Grupos de pórticos adotados de acordo com suas propriedades geométricas

Grupo Pórticos
I 1, 2, 4 e 5
II 3
III 6 e 9
IV 7 e 8

Tabela 2 - Propriedades físicas do material empregado nos modelos computacionais

Módulo de Elasticidade $2,05 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
Densidade Específica 7850 kg/m^3
Coefficiente de Poisson 0,30

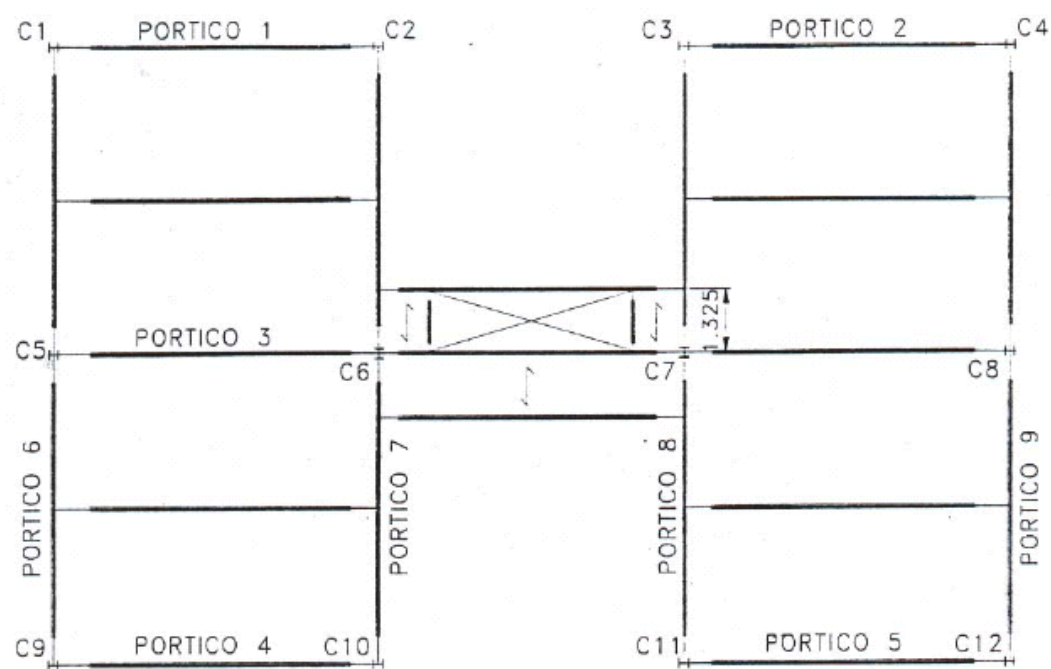
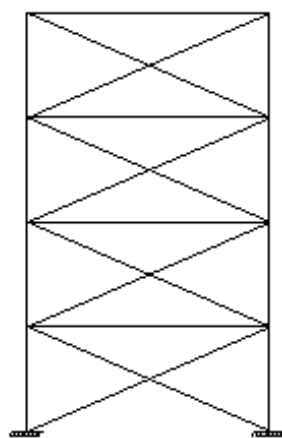
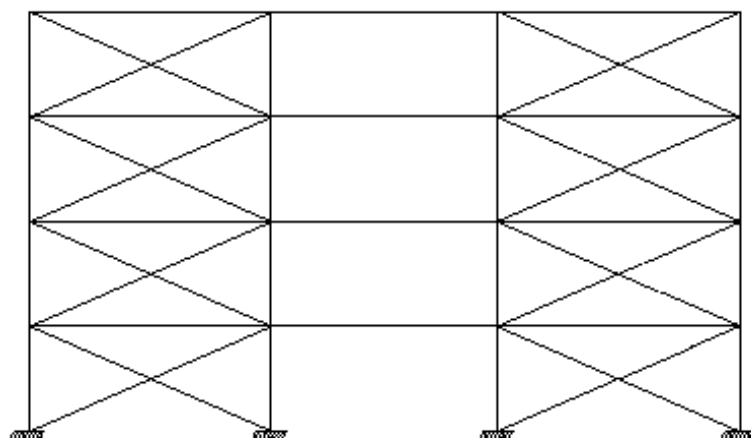


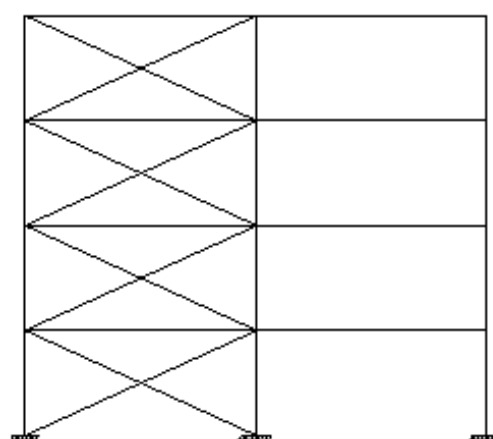
Figura 1 - Desenho esquemático dos pórticos de aço da edificação, BRITO JR (2001).



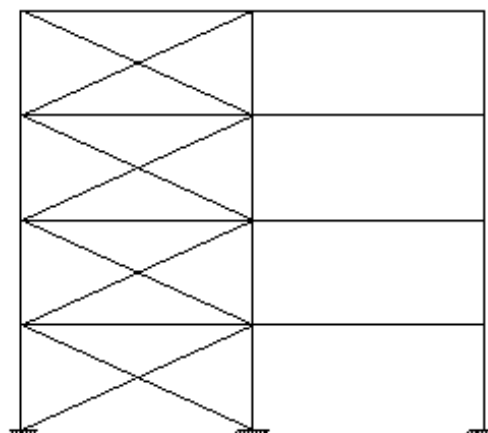
GRUPO 1: PÓRTICO 1 = 2 = 4 = 5.



GRUPO II: PÓRTICO 3.



GRUPO III: PÓRTICO 6 = 9.



GRUPO IV: PÓRTICO 7 = 8.

Figura 2 - Modelos estruturais idealizados para pórticos contraventados

3.2 Modelagem Computacional

A construção dos modelos em elementos finitos, com base no programa ANSYS, ANSYS (1998), foi feita através do emprego de “keypoints” e linhas, que determinam a geometria de cada pórtico. Para a discretização das vigas e colunas dos modelos, foram empregados elementos de viga bidimensionais. A condição de apoio adotada, no presente trabalho, considera todas as bases dos pórticos de aço como sendo engastadas.

Com o objetivo de otimizar o processo de análise foram elaborados modelos parametrizados que permitissem a variação da rigidez entre a viga e a coluna (rigidez vigacoluna). Desta forma, cada grupo para análise foi constituído por 13 modelos, a saber: 1 modelo rígido, 1 modelo flexível e 11 modelos semi-rígidos. Nos modelos semi-rígidos, a rigidez inicial das ligações, S_j , é variada de acordo com critérios de projeto.

Deve-se ressaltar que, para a confecção dos modelos associados aos pórticos semirígidos, foi necessário inserir um elemento de mola ligando as colunas às vigas, conforme mostrado na Figura 3. Dessa forma, variando a rigidez da mola pode-se controlar o nível da rigidez inicial das ligações, S_j , BRITO JR (2001) e BRITO JR et al (2002).

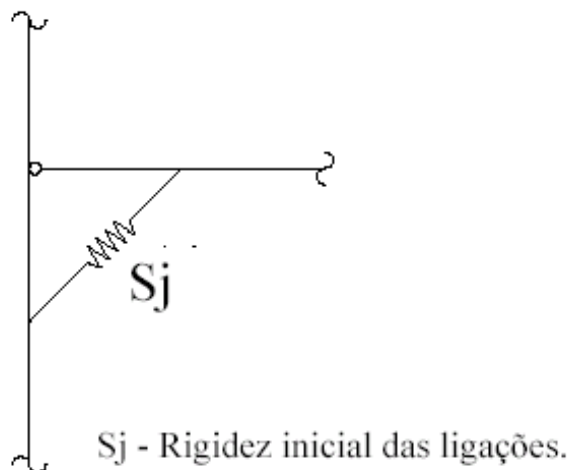


Figura 3

Figura 3 - Modelo empregado para representar as ligações viga-coluna

Convém chamar a atenção do leitor para o fato de que a partir de modelos bastante simples, estudados nas disciplinas de Física, Cálculo e Álgebra Linear, no ciclo básico dos cursos de graduação em engenharia, tal como o modelo mostrado na Figura 3, é possível simular com eficiência o comportamento de sistemas estruturais.

4. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Com o objetivo de aplicar o problema clássico de autovalores e autovetores, estudado correntemente na disciplina de Álgebra Linear, LIPSCHUTZ (1977), NETTO e ADÃO (1995), obtém-se as frequências fundamentais e os respectivos modos de vibração para os diversos modelos em estudo, Figuras 1 e 2.

4.1 Análise paramétrica

As Figuras 4 a 11 apresentam a variação da frequência fundamental dos pórticos de aço, Figuras 1 e 2, em função da rigidez inicial das ligações, S_j . Ressalta-se que, quando o valor de S_j for igual a zero tem-se, então, um pórtico flexível e quando o valor de S_j tender para o infinito (no presente trabalho adota-se $S_j=10$ para proceder a essa simulação), o pórtico já é considerado do tipo rígido.

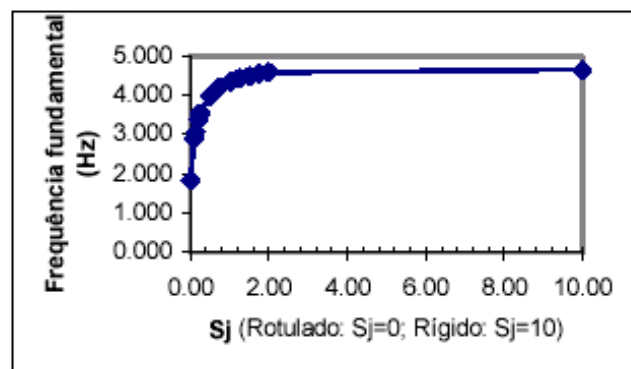


Figura 4 - Pórticos do grupo I.
Modelo não-contraventado.

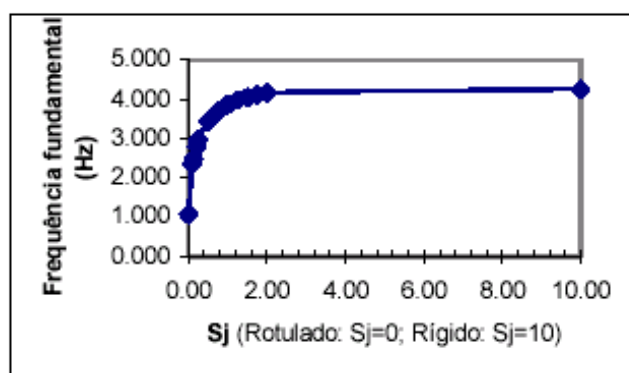


Figura 5 - Pórticos do grupo II.
Modelo não-contraventado.

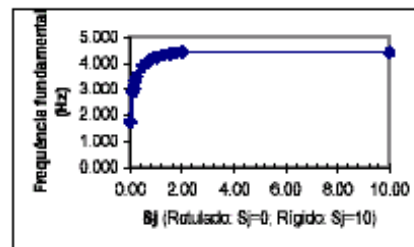


Figura 6 - Pórticos do grupo III.
Modelo não-contraventado.

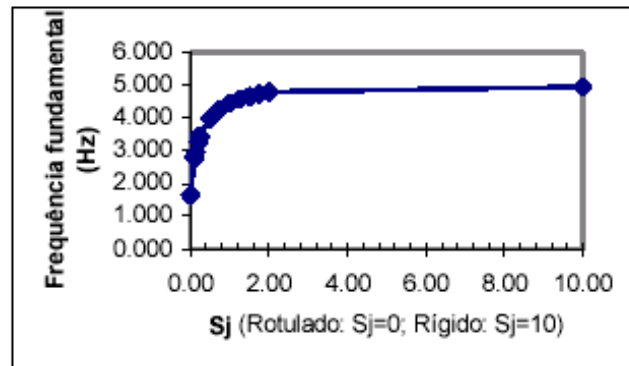


Figura 7 - Pórticos do grupo IV.
Modelo não contraventado.

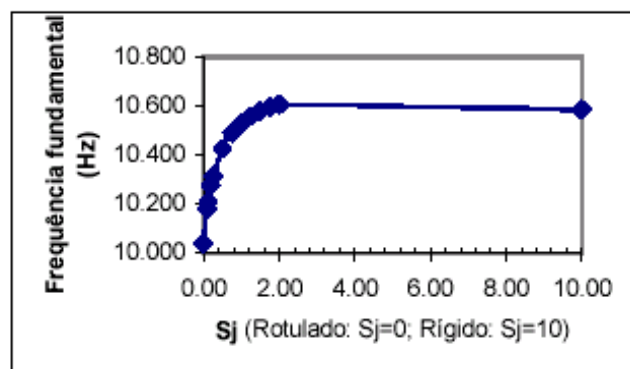


Figura 8 - Pórticos do grupo I.
Modelo contraventado.

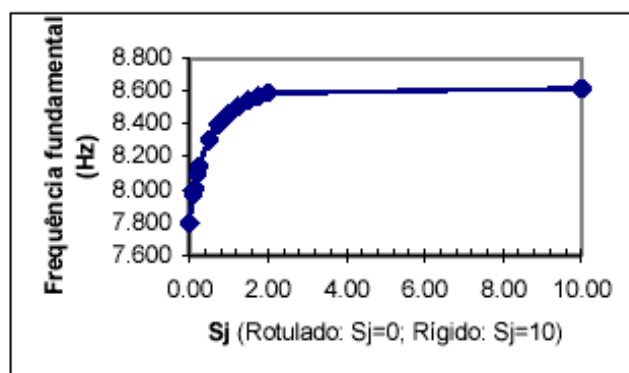


Figura 9 - Pórticos do grupo II.
Modelo contraventado.

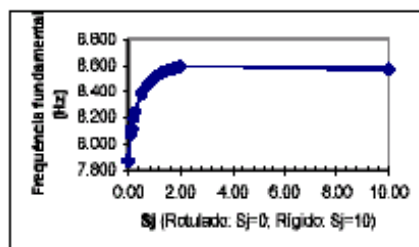


Figura 10 - Pórticos do grupo III.
Modelo contraventado.

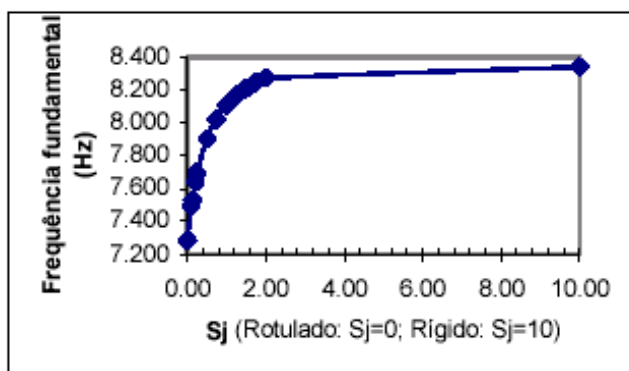


Figura 11 - Pórticos do grupo IV.
Modelo contraventado.

Modelo contraventado.

Com base em uma rápida observação nos gráficos correspondentes as Figuras 4 a 11, verifica-se que a frequência fundamental dos pórticos de aço associados à edificação em estudo apresenta um comportamento altamente não-linear. Pode ser observado, ainda, que os modelos de pórticos contraventados apresentam a frequência fundamental bem superior em comparação com os modelos não-contraventados, Figuras 4 a 11. Esse fato, mostra a coerência do modelo computacional desenvolvido, já que é de conhecimento geral que os sistemas de contraventamento, como aqueles mostrados na Figura 2, são bastante eficientes no sentido de adicionar rigidez à estrutura.

Prossegue-se a análise dinâmica dos modelos, com base em uma comparação quantitativa referente aos valores da frequência fundamental, o que pode evidenciar uma certa sensibilidade quanto ao tipo de ligação viga-coluna adotada

no projeto. Mais uma vez, pode-se perceber que uma análise extremamente simples, referente a comparações simples entre valores de frequências (autovalores), pode ser de grande utilidade para um engenheiro civil. Isto mostra, novamente, a contribuição do presente trabalho no que tange ao ensino de engenharia.

Assim sendo, a Tabela 3 apresenta, agora, uma comparação geral no que tange aos valores da frequência fundamental, f_{01} , dos pórticos de aço em estudo. Com referência aos modelos semi-rígidos, contraventados e não-contraventados, foi adotado um valor para efeito de comparação, referente à metade da rigidez inicial da ligação viga-coluna, $S_j/2$, de forma a definir um nível de rigidez para os modelos.

Frequência Fundamental f_{01} (Hz)	Grupo I		
	Flexível	Semi-rígido	Rígido
Não-Contraventado	1,824	3,987	4,638
Contraventado	10,043	10,427	10,586

Frequência Fundamental f_{01} (Hz)	Grupo II		
	Flexível	Semi-rígido	Rígido
Não-Contraventado	1,067	3,442	4,247
Contraventado	7,799	8,304	8,615

frequência Fundamental f_{01} (Hz)	Grupo III		
	Flexível	Semi-rígido	Rígido
Não-Contraventado	1,737	3,918	4,421
Contraventado	7,872	8,387	8,576

frequência Fundamental f_{01} (Hz)	Grupo IV		
	Flexível	Semi-rígido	Rígido
Não-Contraventado	1,642	3,978	4,955
Contraventado	7,287	7,901	8,342

Observa-se que a variação da frequência fundamental entre os modelos com ligações flexíveis e rígidas é mais acentuada nos pórticos não-contraventados, atingindo um valor da ordem de 200%, Tabela 3. Todavia, nos pórticos contraventados a variação é apenas da ordem de 10%, Tabela 3. Isto ocorre porque o sistema de contraventamento, por si só, já impõe um ganho de rigidez aos pórticos, bastante considerável, atenuando a diferença de comportamento entre os modelos rígidos e flexíveis.

Convém chamar a atenção do leitor, para o fato de que influência do contraventamento é mais marcante nos pórticos flexíveis, onde a variação da frequência fundamental entre os modelos não-contraventados e contraventados é da ordem de 450%, Tabela 3, enquanto este valor chega apenas a 98%, com referência aos modelos rígidos, Tabela 3. Este resultado comprova, mais uma vez, a eficiência do contraventamento adotado, no que se refere a sua função de aumentar a rigidez da estrutura. Finalmente, observa-se que o valor da frequência

fundamental dos modelos semi-rígidos se situa sempre de forma intermediária, evidenciando perfeitamente um comportamento intermediário, como era de se esperar. Tal fato, mais uma vez, comprova a coerência dos resultados obtidos com base no modelo computacional desenvolvido.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo principal do presente trabalho de pesquisa é o de contribuir no que tange ao ensino de engenharia, a partir da desmistificação do emprego corrente dos conceitos teóricos associados ao problema clássico de autovalores e autovetores, estudado regularmente na disciplina de Álgebra Linear, no ciclo básico da graduação dos cursos de engenharia, principalmente, no caso específico da Faculdade de Engenharia da UERJ, FEN/UERJ.

Foi feita uma breve exposição sobre o referido problema, como vem sendo ensinado no ciclo básico da engenharia, e de como o mesmo poderia ser mencionado, de forma a que os alunos de graduação pudessem ter uma idéia básica da aplicação prática desses conceitos. Com base no que foi apresentado no decorrer de todo o presente trabalho de pesquisa, pode-se concluir que o embasamento teórico adquirido no ciclo básico é, sem sombra de dúvida, de grande relevância para um melhor aproveitamento nos cursos de graduação em engenharia. Assim sendo, disciplinas como, por exemplo, Álgebra Linear, poderiam ter um enfoque didático mais direcionado aos problemas correntes da engenharia, de modo a motivar os alunos de graduação, contribuindo para que esses apresentem um grau de maturidade maior, de modo a aplicar esses conceitos em sistemas estruturais reais, como no presente estudo sobre as edificações residenciais.

Assim sendo, é selecionado um modelo estrutural, associado a uma edificação residencial existente, de modo a se proceder a uma análise das frequências naturais (autovalores) e modos de vibração (autovetores), considerando-se, inclusive, o comportamento semi-rígido das ligações viga-coluna.

Com base em uma análise paramétrica preliminar, bastante simples, foi mostrada com clareza a obtenção da frequência fundamental de cada modelo computacional desenvolvido, todos associados à prática corrente de projeto. Desenvolvimento dessa natureza não só motivam os alunos de graduação, como também conferem aos mesmos uma experiência maior no que tange a análise de estruturas.

Finalmente, foi evidenciado com clareza, que uma análise preliminar, baseada em comparações simples entre os valores da frequência fundamental dos diversos modelos em estudo e possíveis frequências da excitação pode servir para definições importantes como, por exemplo, evitar o fenômeno físico da ressonância.

Agradecimentos

Os autores deste trabalho de pesquisa agradecem a Direção da Faculdade de Engenharia, FEN/UERJ, e ao Laboratório de Computação do Ciclo Básico, LabBas/FEN/UERJ.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANSYS, Swanson Analysis Systems, Inc., P.O. Box 65, Johnson Road, Houston, PA, 15342-0065, Version 5.5, Basic analysis procedures, Second Edition, 1998.

BRITO JÚNIOR, O.F. Desenvolvimento de Sistemas Estruturais Semi-Rígidos em Aço e Mistos Para Edificações Residenciais Multi-familiares. 2001. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, Rio de Janeiro.

BRITO JÚNIOR, O.F.; VELLASCO, P.C.G da S.; ANDRADE, S.A.L. de; SILVA, J.G.S. da; LIMA, L.R.O. de. A Parametric Study of Steel and Composite Semi-Rigid Portal Frames. In: THE SIXTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTATIONAL STRUCTURES TECHNOLOGY, CST2002, Praga. Anais publicados em CD-ROM, 2002.

LIPSCHUTZ, S., Álgebra Linear, McGraw-Hill do Brasil Ltda, 1977.

NETTO, C.C.; ADÃO, H.F., Práticas Elementares de Álgebra Linear, 1995.

ROEHL, J.L.P, Dinâmica Estrutural. Análise no Domínio do tempo, Volume I, Departamento de Engenharia Civil, DEC/CIV/PUC-Rio, 1981.

Observação 243 *Algumas correções e adaptações a nossa apostila foram necessárias porém não foi alterado o conteúdo. Créditos são dados ao autor e o trabalho original pode ser obtido através dos anais do COBENGE 2003 ou me enviando um email solicitando o artigo original que terei a maior satisfação de enviá-lo.*