1 SISTEMAS DE COORDENADAS

1.1 Objetivos do capítulo

Ao final deste capítulo o aluno deverá:

- Representar pontos em coordenadas polares, cilíndricas e esféricas;
- Representar graficamente curvas escritas em coordenadas polares;
- Transformar equações de um sistema de coordenadas para outro;
- Efetuar translação de eixos coordenados;
- Rotacionar eixos coordenados;
- Simplificar equações por meio de transformação de coordenadas.

1.2 Coordenadas polares no $\mathbb{R}^2$

Até o presente momento, localizamos um ponto no plano por meio de suas coordenadas cartesianas retangulares. Existem outros sistemas de coordenadas. Um sistema bastante utilizado é o sistema de coordenadas polares. Nesse sistema, as coordenadas de um ponto são dadas pelo raio de uma circunferência e um determinado ângulo. Por exemplo, P(2,$\frac{\pi}{4}$) significa que o ponto será marcado sobre uma circunferência de raio r=2 a $\frac{\pi}{4}$ graus do eixo dos x no sentido anti-horário. Veja na figura 1.

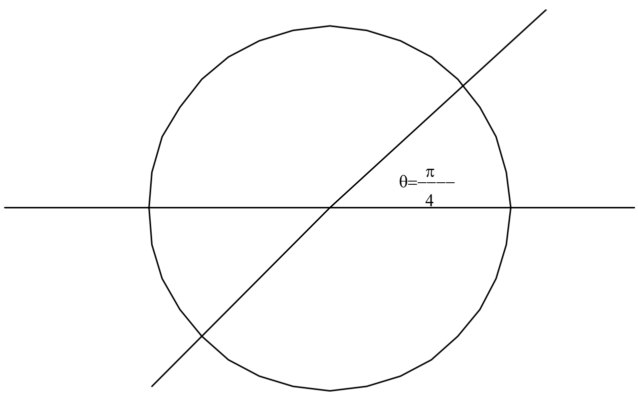


Figura 1: Ponto $P\left(r=2, \theta=\frac{\pi}{4}\right)$ em coordenadas polares

A Figura 2 ilustra um ponto P genérico num sistema de coordenadas polares.

O ponto fixo, denotado por O, é chamado pólo ou origem.

Convenções normalmente usadas:

(i) Se o ângulo $\widehat{AOP}$ for descrito no sentido anti-horário, então $\theta > 0$. Caso contrário, usa-se $\theta < 0$.

(ii) Se $r < 0$, o ponto P estará localizado a180 graus do ângulo $\widehat{AOP}$. Veja na figura 2 a representação do ponto $P\,(-2, 45^o)$

(iii) O par ordenado $(0, \theta)$, sendo θ qualquer, representará uma circunferência de raio $r = 0$ que é denominada pólo.

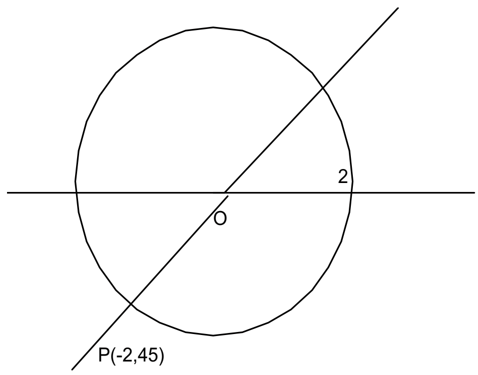


Figura 2:

Geralmente, o sistema de coordenadas polares é descrito como segue:
Um ponto fixo, denotado por O, é chamado pólo ou origem, o semi-eixo coincidindo com o semi-eixo das abscissas é denominado eixo polar, r é o raio da circunferência e o ângulo, dado em pi radianos, é denomiado argumento. Veja na figura 2a, a representação geométrica.
Na fiura 2a, o ponto O é denominado pólo ou origem. A semi-reta fixa $\overrightarrow{OA}$ é chamada eixo polar. O ponto P fica bem determinado através do par (r, θ) em que $|r|$ representa a distância entre a origem O e o ponto P, θ representa a medida do ângulo orientado $\widehat{OAP}$.

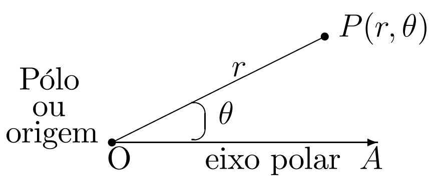


Figura 2a

A Representação num sistema de coordenadas polares dos seguintes pontos $P\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$, $P\left(-2, \frac{\pi}{4}\right)$, é mostrado na Figura 3.

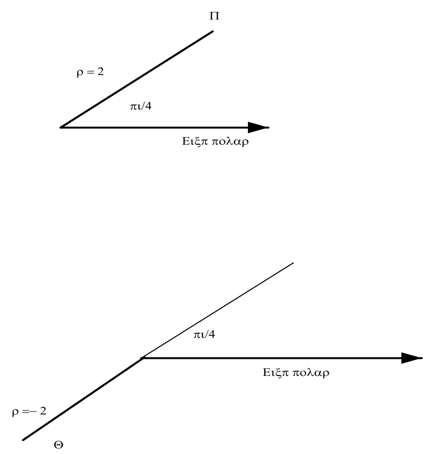


Figura 3:

A Figura 3a mostra os pontos P

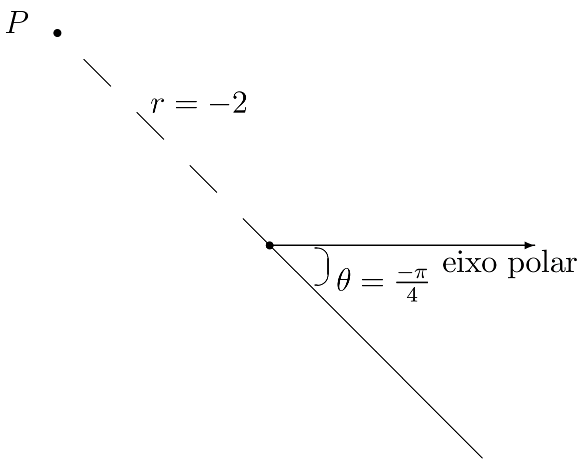


Figura 3a

1.3 Relação entre o Sistema de Coordenadas Cartesianas Retangulares e o Sistema de Coordenadas Polares.

Em várias situações, surge a necessidade de nos referirmos a ambas, coordenadas cartesianas e coordenadas polares de um ponto P. Para visualizar isto, fazemos a origem do primeiro sistema coincidir com o pólo do segundo sistema, o eixo polar com o eixo positivo dos x e o raio para o qual $\theta = \pi/2$ com o eixo positivo dos y (ver Figura 3b).

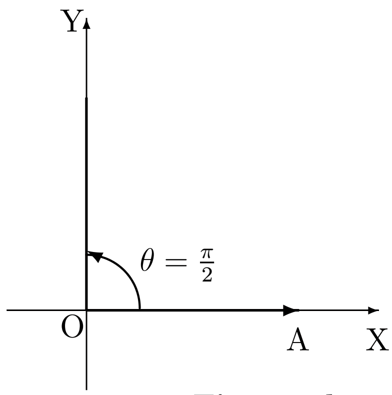
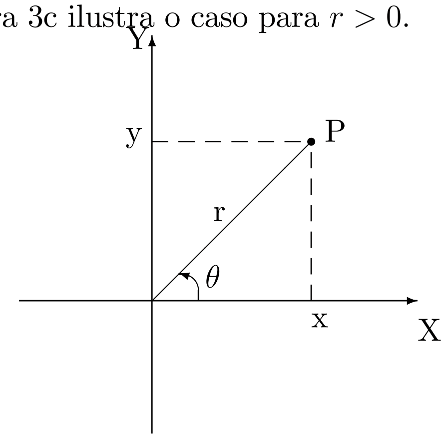


Figura 3b

Supondo que P seja um ponto com coordenadas cartesianas (x, y) e coordenadas polares (r, θ), vamos analisar o caso em que o ponto P está no primeiro quadrante. A Figura 3c ilustra o caso para $r > 0$.



(a)

Figura 3c

Podemos observar que:

(i) Para $r > 0$, temos

$\cos\theta = \frac{x}{r}$ e $\sin\theta = \frac{y}{r}$.

(ii) Para $r < 0$, temos

$\cos\theta = \frac{-x}{-r}$ e $\sin\theta = \frac{-y}{-r}$.

Portanto,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta. \end{cases} \tag{1}$$

Pode-se verificar a validade das relações encontradas, no caso em que o ponto P se encontra sobre um dos eixos ou num outro quadrante.

Usando (1), podemos deduzir outra relação muito usada.

Elevando ambos os membros das equações em (1) ao quadrado, podemos escrever

$$\begin{cases} x^2 = r^2\cos^2\theta \\ y^2 = r^2\sin^2\theta. \end{cases}$$

Adicionando membro a membro, obtemos:

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta$$

ou

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Portanto,

$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}. \tag{2}$$

Exemplo 1 *Encontrar as coordenadas cartesianas do ponto cujas coordenadas polares são* $(-4, 7\pi/6)$.

Solução. A Figura 3d ilustra este ponto.

Temos,

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta & \quad \text{e} \quad y &= r\sin\theta \\ &= -4\cos\tfrac{7\pi}{6} & &= -4\sin\tfrac{7\pi}{6} \\ &= -4\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) & &= -4\left(-\tfrac{1}{2}\right) \\ &= 2\sqrt{3} & &= 2. \end{aligned}$$

Portanto, $(2\sqrt{3}, 2)$ são as coordenadas cartesianas do ponto dado.

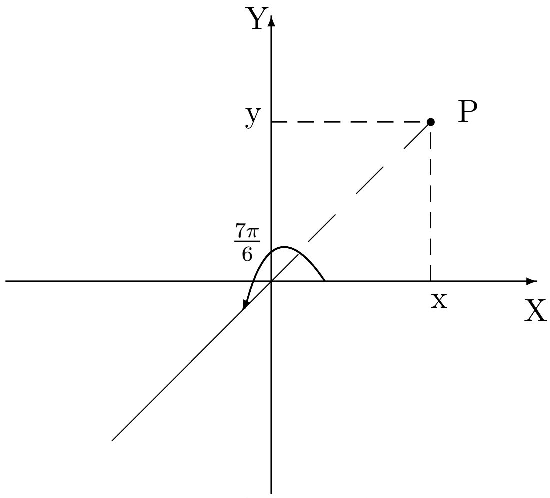


Figura 3d

Exemplo 2 *Encontrar* (r,θ)*, supondo* $r < 0$ *e* $0 \leq \theta < 2\pi$ *para o ponto* P*, cujas coordenadas cartesianas são* $(\sqrt{3}, -1)$*.*

Solução. A Figura 3e ilustra o ponto P.

$$\begin{aligned} r &= -\sqrt{x^2+y^2} \\ &= -\sqrt{3+1} \\ &= -2; \end{aligned}$$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{-2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$.

Portanto, $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

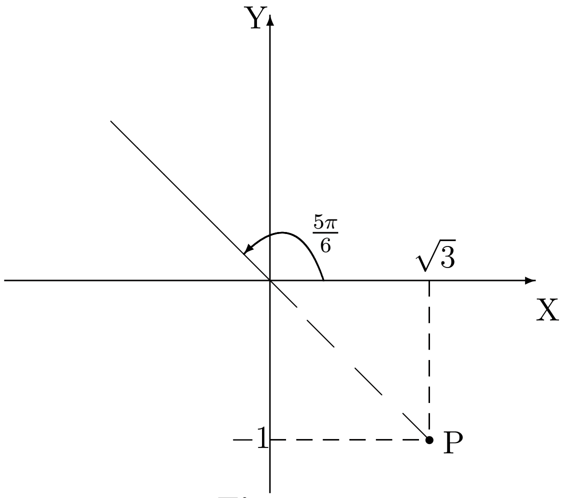


Figura 3e

1.4 Gráfico em coordenadas polares

Para traçar o gráfico de uma curva em coordenadas polares $\rho = f(\theta)$ procede-se como segue:

a) Encontra-se os valores de ρ para alguns arcos notáveis;

b) Elabora-se um disco com setores cujos raios são os valores encontrados para ρ;

c) Marcam-se os pontos interseção do setor do disco com o raio ρ associado ao ângulo correspondente;

d) Unem-se os pontos por meio de uma linha curva contínua.

Exemplo 3 *Traçar o gráfico da curva* $\rho = 4\sqrt{\cos 2\theta}$.

Solução: vamos tomar para 2θ os arcos 0^o, 30^o, 45^o, 60^o e 90^o e seus correspondentes nos outros quadrantes. Assim podemos formar a tabela de valores

θ	2θ	ρ		θ	2θ	ρ		θ	2θ	ρ		θ	2θ	ρ
0	0	4		135	270	0		195	390	3.4		315	630	2
15	30	3.4		150	300	2		202, 5	415	2.8		330	660	2.8
22, 5	45	2.8		157, 5	315	2.8		210	420	2		345	690	3.4
30	60	2		165	330	3.4		225	450	0		360	720	4
45	90	0		180	360	4								

A figura 4 representa a distribuição dos pontos da tabela sobre os setores dum disco e o traçado do gráfico.

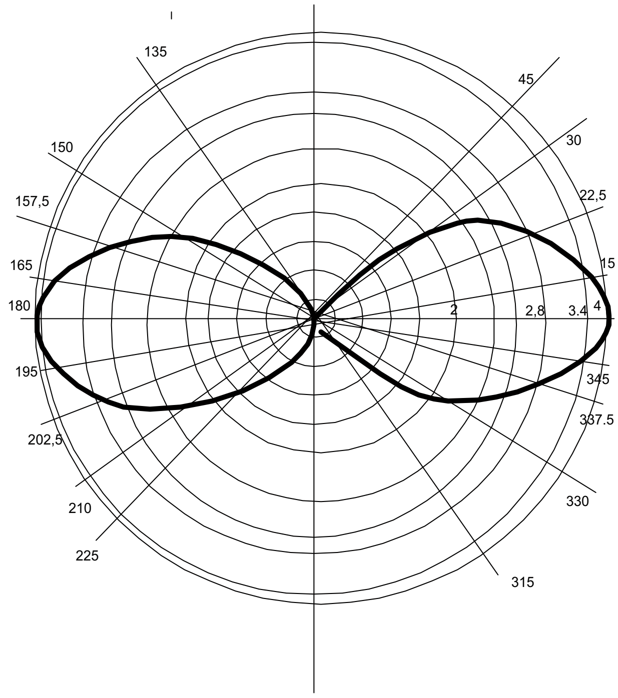


Figura 4:

1.5 Técnicas que facilitam o traçado do gráfico de uma curva em coordenadas polares

O gráfico de $F(r, \theta) = 0$ é formado por todos os pontos cujas coordenadas polares satisfazem a equação. É comum apresentarmos a equação numa forma explícita, isto é, $r = f(\theta)$.

Os seguintes procedimentos poderão nos auxiliar no esboço do gráfico:

1. calcular os pontos de máximo e/ou mínimos;
2. encontrar os valores de θ para os quais a curva passa pelo pólo;
3. verificar simetrias. Se:
   (a) a equação não se altera quando substituirmos r por $-r$, existe simetria em relação à origem;
   (b) a equação não se altera quando substituirmos θ por $-\theta$, existe simetria em relação ao eixo polar, e;

(c) a equação não se altera quando substituirmos θ por $\pi - \theta$, existe simetria em relação ao eixo $\theta = \frac{\pi}{2}$ (que é equivalente ao eixo dos y).

1.5.1 Exemplos

1. Esboçar a curva $r = 2(1 - \cos\theta)$.

Como a equação não se altera ao substituirmos θ por $-\theta$, isto é

$$r = 2(1 - \cos\theta) = 2(1 - \cos(-\theta)),$$

concluímos que existe simetria em relação ao eixo polar. Logo, basta analisar valores de θ tais que $0 \leq \theta \leq \pi$.

Para $0 \leq \theta \leq \pi$, encontramos um ponto de máximo $(4, \pi)$ e um ponto de mínimo $(0, 0)$.

A Tabela 1 mostra alguns pontos da curva, cujo esboço é mostrado na Figura 4a.

Tabela 1

θ	r
0	0
$\frac{\pi}{3}$	1
$\frac{\pi}{2}$	2
$\frac{2\pi}{3}$	3
π	4

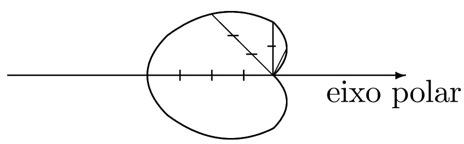


Figura 4a

Esboçar a curva $r = 2\cos 2\theta$.

Analisando as simetrias, temos que

(a) A curva é simétrica em relação ao eixo dos x, pois $r = 2\cos(-2\theta) = 2\cos 2\theta$.

(b) A curva é simétrica em relação ao eixo dos y, pois $r = 2\cos[2(\pi - \theta)] = 2\cos(2\pi - 2\theta) = 2\cos 2\theta$.

Logo, basta fazer uma tabela para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Em $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, a curva passa pelo pólo quando $\theta = \frac{\pi}{4}$, pois $r = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 2\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Podemos ainda verificar que, para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, temos um ponto de máximo $(2, 0)$ e um ponto de mínimo $(-2, \pi/2)$.

Usando a Tabela 2 e os resultados anteriores, esboçamos a curva vista na Figura 4b.

Tabela 2

θ	r
0	2
$\frac{\pi}{6}$	1
$\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{\pi}{3}$	-1
$\frac{\pi}{2}$	-2

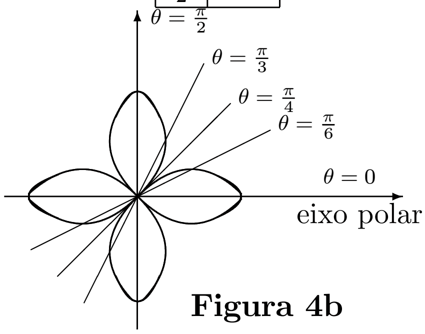


Figura 4b

1.5.2 Algumas Equações em Coordenadas Polares e seus respectivos Gráficos.

1.5.3 Equações de retas.

(a) $\theta = \theta_0$ ou $\theta = \theta_0 \pm n\pi$, $n \in Z$ é uma reta que passa pelo pólo e faz um ângulo de θ_0 ou $\theta_0 \pm n\pi$ radianos com o eixo polar (ver Figura 4c).

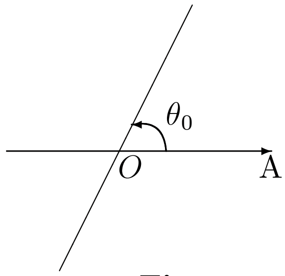


Figura 4c

(b) $r\sin\theta = a$ e $r\cos\theta = b$, $a, b \in \Re$, são retas paralelas aos eixos polar e $\pi/2$, respectivamente (ver Figuras 4d e 4e).

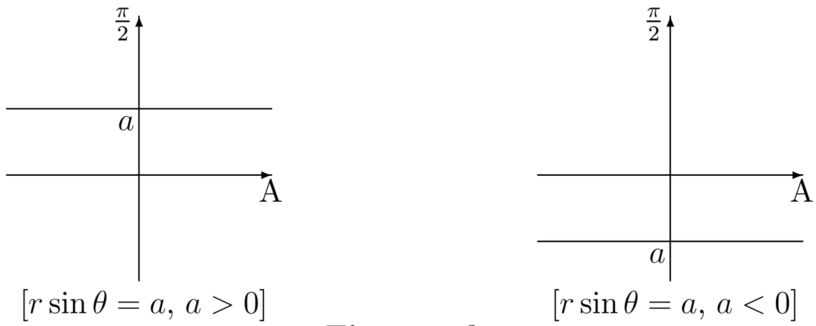


Figura 4d

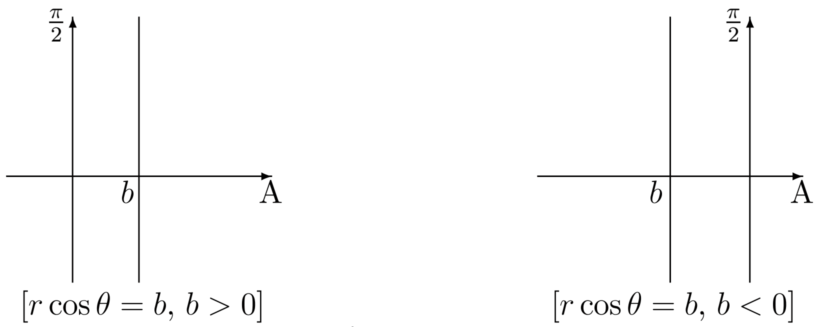


Figura 4e

1.5.4 Circunferências.

(a) $r = c$, $c \in \Re$ é uma circunferência centrada no pólo e raio $|c|$ (ver Figura 4f).

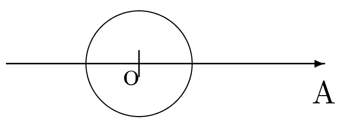
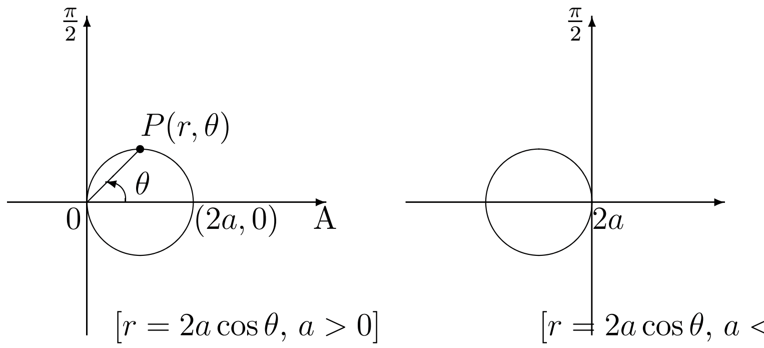


Figura 4f

(b) $r = 2a\cos\theta$ é uma circunferência de centro no eixo polar, tangente ao eixo $\theta = \pi/2$:

se $a > 0$, o gráfico está à direita do pólo;

se $a < 0$, o gráfico está à esquerda do pólo (ver Figura 4g).



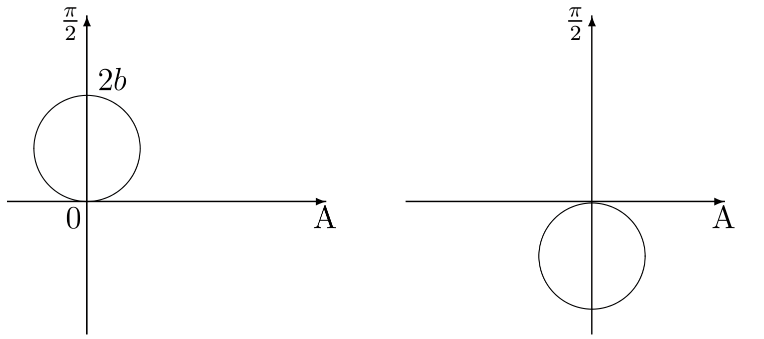
$[r = 2a\cos\theta,\ a > 0]$ $[r = 2a\cos\theta,\ a <$

Figura 4g

(c) $r = 2b\sin\theta$ é uma circunferência de centro no eixo $\pi/2$ e que tangencia o eixo polar:

se $b > 0$, o gráfico está acima do pólo;

se $b < 0$, o gráfico está abaixo do pólo (ver Figura 4h).



$[r = 2b\sin\theta,\ b > 0]$ $[r = 2b\sin\theta,\ b < 0]$

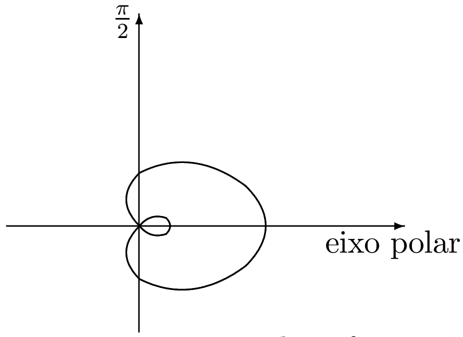
Figura 4h

1.5.5 Limaçons.

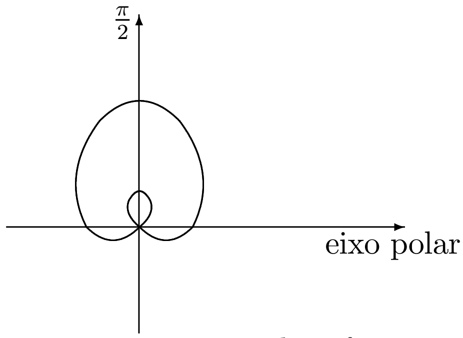
$r = a \pm b\cos\theta$ ou $r = a \pm b\sin\theta$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ são limaçons.

Temos,

se $b > a$, então o gráfico tem um laço (ver Figura 4i);



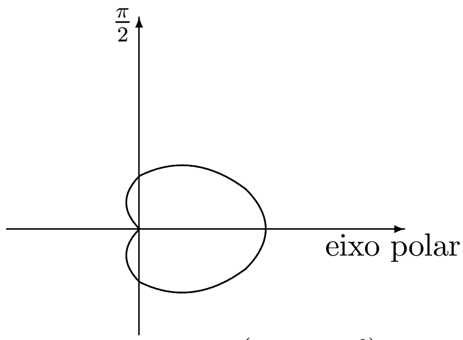
$r = a + b\cos\theta$



$r = a + b\sin\theta$

Figura 4i

se $b = a$, então o gráfico tem o formato de um coração, por isso é conhecido como Cardióide (ver Figura 4j);



$r = a(1 + \cos\theta)$

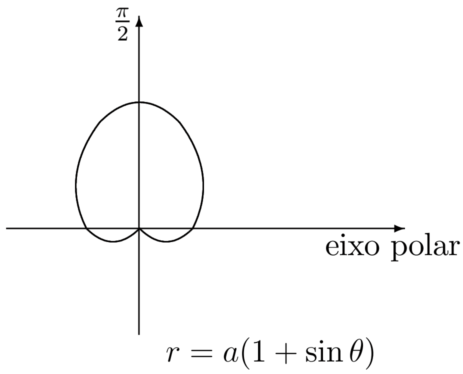


Figura 4j

se $b < a$, então o gráfico não tem laço (ver Figura 4l).

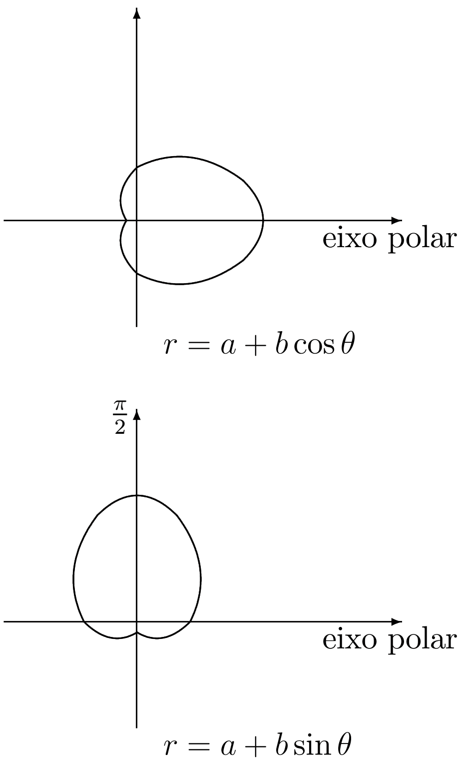
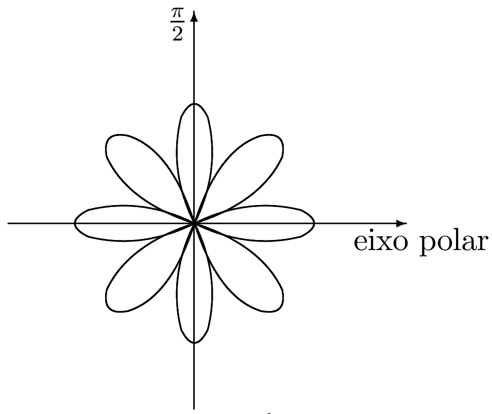


Figura 4l

Observamos que na Figura 4i usamos $a = 1$ e $b = 2$, na Figura 4j usamos $a = b = 1$ e na Figura 4l usamos $a = 3$ e $b = 2$.

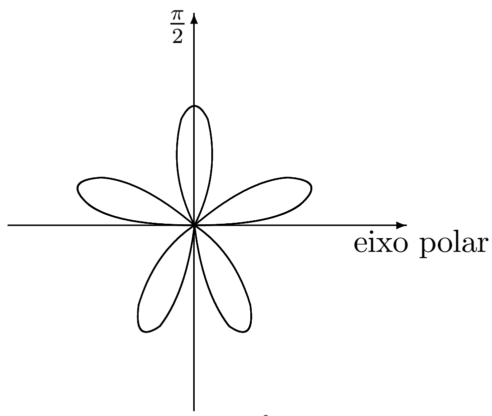
$r = a\cos n\theta$ ou $r = a\sin n\theta$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ são rosáceas:
se n for par temos uma rosácea de $2n$ pétalas (ver Figura 4m);



$r = a\cos n\theta$

Figura 4m

e n for ímpar a rosásea terá n pétalas (fig 4n)

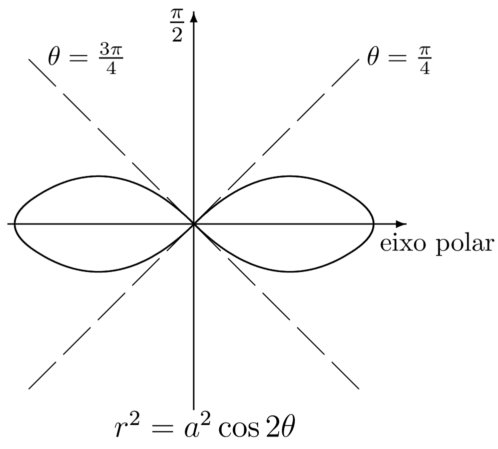


$r = a\sin n\theta$

Figura 4n

1.5.6 Lemniscatas.

$r^2 = \pm a^2 \cos 2\theta$ ou $r^2 = \pm a^2 \sin 2\theta$, onde $a \in \Re$ são lemniscatas (ver Figura 4o).



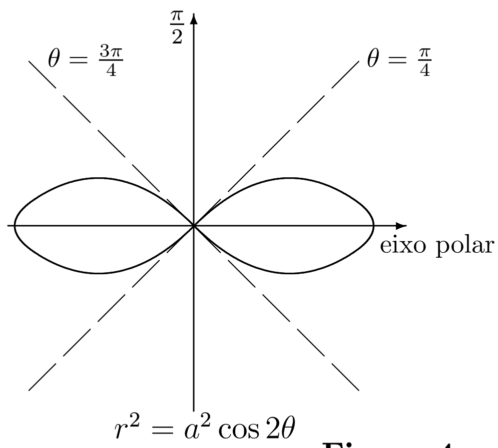


Figura 4o

Observamos que na Figura 4o usamos $a = 1$.

1.5.7 Espirais.

As equações seguintes representam algumas espirais:

$$
\begin{array}{ll}
(a) & r\theta = a, a > 0 \\
(b) & r = a\theta, a > 0 \\
(c) & r = e^{a\theta} \\
(d) & r^2 = \theta
\end{array}
$$

As Figuras 4p a 4r ilustram estas espirais.

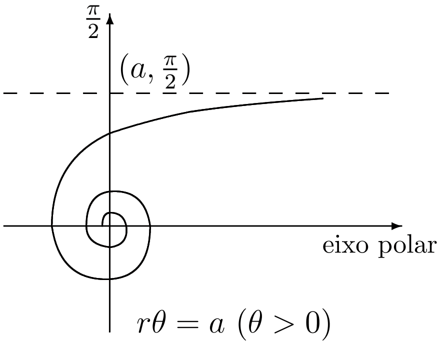
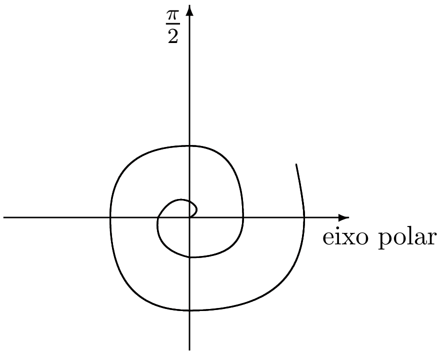
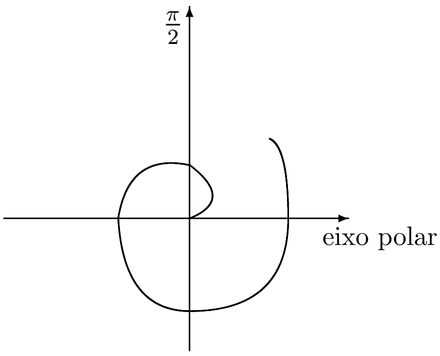


Figura 4p



$r = a\theta\ (\theta \geq 0)$

Figura 4q



$r = \sqrt{\theta}$

Figura 4r